



# Transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques

Gabriel Lemarié

## ► To cite this version:

Gabriel Lemarié. Transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : . tel-00424399

**HAL Id: tel-00424399**

**<https://theses.hal.science/tel-00424399>**

Submitted on 15 Oct 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique Théorique  
(ED 389)

présentée par

M. Gabriel LEMARIÉ

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de la thèse :

# Transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques

soutenue le 07 septembre 2009 devant le jury composé de :

M. Philippe BOUYER ..... Examineur  
M. Dominique DELANDE ..... Directeur de thèse  
M. Jean-Claude GARREAU ..... Examineur  
Mme Claire LHUILLIER ..... Présidente du jury  
M. Keith SLEVIN ..... Rapporteur  
M. Bart Van TIGGELEN ..... Rapporteur



---

# Table des matières

---

<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
A Atomes froids soumis à un potentiel lumineux . . . . .	3
B Chaos quantique et désordre . . . . .	4
C Quasi-périodicité temporelle et dimensionnalité effective . . . . .	5
D Limitations expérimentales . . . . .	6
E Caractérisation de la transition d'Anderson . . . . .	6
F Classe d'universalité du Kicked rotor quasi-périodique . . . . .	7
G Fonction d'onde critique . . . . .	7
H Plan de la thèse . . . . .	8
<b>2 Transition d'Anderson dans les systèmes désordonnés</b>	<b>11</b>
A Modèles simples de systèmes désordonnés . . . . .	13
A.1 Modèle de désordre structurel . . . . .	13
A.2 Modèle d'Anderson . . . . .	14
B Différentes caractérisations de la localisation . . . . .	16
B.1 Comportement asymptotique des états propres . . . . .	16
B.2 Probabilité de diffusion quantique . . . . .	17
B.3 Conductance . . . . .	18
B.4 Exposant de Lyapunov . . . . .	19
C Théories de la localisation . . . . .	21
C.1 Théorie auto-cohérente . . . . .	21
C.1.1 Localisation faible et interférences quantiques . . . . .	21
C.1.2 Description du régime de localisation forte et de la transi- tion d'Anderson . . . . .	25
C.2 Théorie d'échelle . . . . .	26
C.2.1 Invariance d'échelle . . . . .	27
C.2.2 Renormalisation . . . . .	27
C.2.3 Finite-size scaling et transition d'Anderson . . . . .	31



C.2.4	Lois d'échelle à un paramètre pour le phénomène de localisation . . . . .	33
D	Études expérimentales de la transition d'Anderson . . . . .	37
D.1	Longueur de cohérence de phase . . . . .	37
D.2	Observation de la transition métal-isolant dans les solides désordonnés . . . . .	38
D.3	Observation de la transition d'Anderson avec des ondes classiques . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Le Kicked Rotor périodique et sa relation avec le modèle d'Anderson</b>	
<b>1D</b>		<b>41</b>
A	Le Kicked Rotor périodique atomique . . . . .	42
A.1	Dynamique classique . . . . .	43
A.1.1	Instabilité locale . . . . .	45
A.1.2	Comportement stochastique . . . . .	47
A.1.3	Diffusion chaotique . . . . .	47
A.2	Dynamique quantique . . . . .	49
A.2.1	Simulation numérique . . . . .	50
A.2.2	Localisation dynamique . . . . .	51
B	Equivalence formelle entre le Kicked Rotor et le modèle d'Anderson . . . . .	52
B.1	Opérateur d'évolution et modèle d'Anderson unitaire . . . . .	52
B.2	Equation aux valeurs propres et modèle de Loyd . . . . .	53
B.3	Localisation des états de Floquet de l'opérateur d'évolution . . . . .	54
C	De la localisation des états de Floquet à la localisation dynamique . . . . .	56
D	Effets des résonances quantiques . . . . .	58
E	Classes de symétrie . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Réalisation expérimentale avec des ondes de matière</b>	<b>63</b>
A	Montage expérimental . . . . .	63
A.1	Piège magnéto-optique . . . . .	65
A.2	Onde stationnaire pulsée . . . . .	65
A.3	Vélocimétrie Raman . . . . .	68
B	Déviation du dispositif expérimental au modèle théorique . . . . .	73
B.1	Durée finie des impulsions d'onde stationnaire . . . . .	73
B.2	Inhomogénéité de $K$ . . . . .	75
C	Sources de décohérence . . . . .	77
C.1	Collisions atomiques . . . . .	77
C.2	Émission spontanée . . . . .	79
C.3	Inclinaison de l'onde stationnaire . . . . .	79
D	Conditions pour l'observation des effets de localisation . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Transition d'Anderson avec le Kicked Rotor quasi-périodique</b>	<b>83</b>
A	Le Kicked Rotor quasi-périodique et sa relation avec le modèle d'Anderson	
3D	. . . . .	84
A.1	Le Kicked Rotor périodique 3D . . . . .	84
A.2	Le Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences . . . . .	86
A.2.1	Énergie cinétique transverse linéaire et dynamique diffusive . . . . .	88

A.2.2	Énergie cinétique transverse linéaire et modèle d'Anderson 3D . . . . .	88
A.2.3	Source plane . . . . .	89
A.2.4	Classe de symétrie du Kicked Rotor quasi-périodique . . .	91
A.2.5	Autres arguments en faveur de la correspondance entre le Kicked Rotor quasi-périodique et les systèmes désordonnés 3D invariants par renversement du temps . . . . .	92
B	Réalisation expérimentale . . . . .	93
C	Effets de temps fini et théorie d'échelle en temps . . . . .	93
D	Article publié dans <i>Physical Review Letters</i> . . . . .	98
E	Article accepté à <i>Physical Review A</i> . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Universalité de la transition d'Anderson</b>	<b>123</b>
A	Analyse fine du flot de renormalisation observé . . . . .	124
B	Universalité du comportement critique . . . . .	125
C	Article publié dans <i>Europhysics Letters</i> . . . . .	127
<b>7</b>	<b>Dynamique d'un paquet d'ondes au seuil de la transition d'Anderson</b>	<b>135</b>
A	Fonction d'onde critique telle que déduite de la théorie auto-cohérente . . .	137
A.1	Loi d'échelle pour la constante de diffusion $D(\omega)$ . . . . .	137
A.1.1	Fonction d'échelle . . . . .	138
A.1.2	Comportement asymptotique de la fonction d'échelle dans le régime diffusif . . . . .	139
A.1.3	Comportement asymptotique de la fonction d'échelle dans le régime localisé . . . . .	139
A.1.4	Comportement de $D(\omega)$ à la transition . . . . .	140
A.2	Forme et dynamique de la fonction d'onde critique . . . . .	140
A.3	Confrontation des prédictions de la théorie auto-cohérente pour la dynamique critique avec les résultats numériques . . . . .	145
A.4	Comparaison de la prédiction de la théorie auto-cohérente pour la fonction d'onde critique avec les données expérimentales . . . . .	149
B	Déviation à la théorie auto-cohérente : multi-fractalité . . . . .	150
B.1	Probabilité de retour à l'origine . . . . .	151
B.1.1	Densité locale d'états . . . . .	152
B.1.2	Dimension de corrélation . . . . .	152
B.1.3	Corrélations spectrales et probabilité de retour à l'origine .	153
B.1.4	Fonction de corrélation temporelle . . . . .	154
B.2	Expansion du paquet d'ondes . . . . .	155
B.3	Densité locale d'état multi-fractale pour le Kicked Rotor quasi-périodique au régime critique . . . . .	156
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>159</b>
A	Transition d'Anderson en dimension $d > 3$ . . . . .	160
B	Champ magnétique effectif . . . . .	161
C	Approche statistique . . . . .	161
D	Interactions et désordre . . . . .	161

<b>Annexe</b>	<b>163</b>
A Description diagrammatique du Kicked Rotor périodique 1D . . . . .	163
A.1 Langage diagrammatique pour décrire le Kicked Rotor . . . . .	163
A.1.1 Discussion qualitative de la localisation dynamique faible . . . . .	163
A.1.2 Dynamique chaotique déterministe et marche aléatoire . . . . .	165
A.1.3 Le Kicked Rotor aléatoire . . . . .	167
A.1.4 Analogies avec les systèmes désordonnés usuels . . . . .	167
A.2 Diffuson et dynamique classique diffusive . . . . .	168
A.2.1 Équation de Bethe-Salpether . . . . .	169
A.2.2 Limite diffusive . . . . .	170
A.2.3 Diffusion classique . . . . .	171
A.3 Cooperon et corrections quantiques . . . . .	172
A.3.1 Facteur de structure du Cooperon . . . . .	173
A.3.2 Cooperon dans l'espace réciproque . . . . .	174
A.3.3 Cooperon dans la limite diffusive . . . . .	175
A.4 Description de la localisation dynamique faible . . . . .	175
A.4.1 Vertex interférentiel . . . . .	176
A.4.2 Boucle de Hikami . . . . .	178
A.4.3 Correction quantique à la diffusion classique . . . . .	180
A.4.4 Localisation dynamique faible . . . . .	180
B Théorie auto-cohérente du régime de localisation dynamique forte . . . . .	182
B.1 Équation auto-cohérente pour $D(\omega)$ . . . . .	182
B.2 Solution de l'équation auto-cohérente pour le Kicked Rotor . . . . .	183
B.3 Théorie auto-cohérente de la transition d'Anderson avec le Kicked Rotor 3D périodique . . . . .	184
B.3.1 Equation auto-cohérente en dimension trois . . . . .	185
B.3.2 Désordre critique $k_c$ . . . . .	185
B.3.3 Exposant critique $s$ associé à la constante de diffusion $D(0)$ . . . . .	186
B.3.4 Exposant critique $\nu$ associé à la longueur de localisation . . . . .	186
<b>Bibliographie</b>	<b>188</b>

---

# Résumé

---

## Transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques

En dimension trois, les états propres d'une particule quantique soumise à un potentiel désordonné présentent une transition, appelée transition d'Anderson, entre un régime délocalisé à faible désordre et un régime localisé à fort désordre. Cette localisation étant due aux interférences, elle est facilement perturbée par des effets de décohérence ou d'interaction entre particules, et est donc délicate à observer. Dans ce mémoire, nous rapportons nos travaux théoriques ayant permis la première observation expérimentale de la transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques.

Un nuage d'atomes froids soumis à une onde stationnaire pulsée de façon quasi-périodique réalise une variante du Kicked Rotor (paradigme du chaos quantique) analogue à un modèle d'Anderson 3D. Cependant, la limite thermodynamique n'est pas accessible expérimentalement. Interprétant ces contraintes comme similaires à des effets de taille finie, nous construisons une méthode de "finite-time scaling" permettant de caractériser la transition expérimentalement, de donner la première détermination expérimentale non-ambigüe de l'exposant critique  $\nu$  de la transition, et de confirmer que le Kicked Rotor quasi-périodique appartient à la même classe d'universalité que le modèle d'Anderson. À partir de la théorie auto-cohérente de la localisation, nous calculons l'état critique du système, prédiction trouvée en très bon accord avec les données expérimentales et numériques.

**Mots-clefs :** localisation, transition d'Anderson, ondes de matière atomiques, chaos quantique, désordre, transport quantique



---

# Abstract

---

## The Anderson transition with atomic matter waves

In three dimensions, the eigenstates of a quantum particle subject to a disordered potential have a transition, called the Anderson transition, between a delocalized regime at low disorder and a localized regime at high disorder. This localization being due to interference, it is easily perturbed by decoherence or interaction between particles, and is therefore difficult to observe. In this paper, we report our theoretical work which has enabled the first experimental observation of the Anderson transition with atomic matter waves.

A cloud of cold atoms exposed to a quasi-periodically pulsed standing-wave realizes a variant of the Kicked Rotor (a paradigm of quantum chaos), analogous to a 3D Anderson model. However, the thermodynamic limit is not accessible experimentally. Interpreting these constraints as similar to finite size effects, we construct a finite-time scaling method to characterize the transition, giving the first unambiguous experimental determination of the critical exponent  $\nu$  of the transition, and to confirm that the quasiperiodic Kicked Rotor belongs to the same universality class as the Anderson model. From the self-consistent theory of localization, we calculate the critical state of the system, prediction found in very good agreement with experimental and numerical data.

**Keywords :** localization, Anderson transition, atomic matter waves, quantum chaos, disorder, quantum transport



---

# Remerciements

---

Je voudrais dire tout haut des sentiments que j'ai gardés pour moi pendant ces années de thèse, sentiments d'admiration, de reconnaissance, d'amitié envers ceux qui ont marché à mes côtés ou bien m'ont porté.

Je n'aurais sans doute pas fait de thèse sans la passion insufflée par mes parents et grands-parents pour une certaine forme de sagesse. Ils m'ont façonné un aiguillon qui dans les moments de déroute m'a aidé à poursuivre ma marche. Je me souviens avec une grande émotion de mon grand-père me prenant pour la dernière fois dans ses bras. Je lui disais alors que le lui dédierais ma thèse, ce que je fais. "Và, pensiero, sull' ali dorate!"

Pourquoi ai-je choisi d'étudier la physique? Sans doute pour des raisons au départ très naïves et stéréotypées. Combien je suis reconnaissant aux scientifiques passionnés Patricio Leboeuf, Keith Burnett, Jean-Baptiste Fournier et Dominique Delande de m'avoir révélé de véritables et si belles raisons d'étudier la physique!

Dominique Delande a été mon directeur de thèse. J'ai eu la fausse impression, lors de nos premières rencontres, de devoir quelque peu me battre afin qu'il accepte de diriger mes travaux (je souhaitais vivement faire ma thèse avec lui), et j'ai pu penser à quelques occasions ne pas être digne de lui. Le fait est qu'il est devenu rapidement pour moi, et malgré lui, un père de thèse. Et il n'est pas toujours aisé de travailler avec un scientifique que l'on estime infiniment. J'ai beaucoup apprécié la manière (humaine, passionnante, lumineuse, rigoureuse) dont il m'a dirigé. J'ai joui d'une grande liberté de travail, tout en étant guidé avec beaucoup d'attention. Je suis admiratif de l'environnement scientifique qu'il a su construire autour de son équipe, par exemple, sa collaboration avec l'équipe d'expérimentateurs dirigée par Jean-Claude Garreau et Pascal Szriftgiser du laboratoire PHLAM de Lille. Son bilinguisme théorie-expérience a beaucoup aidé dans cette collaboration. Et il m'a donné goût à cette physique à la frontière entre théorie et expérience. Également, les ressources informatiques qu'il m'a mises à disposition ont toujours été plus que parfaites. Et j'ai pu bénéficier de sa très grande expertise des simulations numériques. Merci, mille fois merci!

Benoît Grémaud a été, durant les deux premières années de ma thèse, un second directeur. Il a su me guider, parfois au jour le jour, me soutenir dans mon effort dirigé vers et pour les expérimentateurs, me rassurer, ce toujours avec une grande patience et une grande gentillesse. Il m'a beaucoup aidé dans mon travail allant du théorique au numérique, ou comment mettre en oeuvre de façon pratique des idées assez abstraites. Je lui en suis très



reconnaissant.

L'équipe des expérimentateurs avec laquelle j'ai collaboré a eu un impact énorme sur mon travail. J'ai été très heureux de vivre cette expérience avec Julien Chabé, puis Hans Lignier, tous deux dirigés par Jean-Claude Garreau et Pascal Szriftgiser. Je les remercie tous quatre pour la confiance qu'ils m'ont accordée, la gentillesse de nos rapports. Nos discussions au laboratoire PHLAM à Lille ont été des sortes de conciliabules passionnants où l'on examinait avec le plus de rigueur et d'enthousiasme possible nos déboires ou nos réussites, et comment aller plus avant. Qu'il est intéressant de faire dialoguer une théorie ardue avec une expérience complexe ! Un grand merci.

Également merci à Philippe Bouyer, Claire Lhuillier, Keith Slevin et Bart Van Tiggelen d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse, d'avoir consacré une partie de leur temps précieux à lire ce mémoire et pour les suggestions qu'ils ont pu faire.

Je remercie chaleureusement Romain Pierrat, post-doc dans l'équipe de Dominique Delande, pour sa très bonne humeur journalière, sa grande patience, ses conseils pertinents, et ses encouragements. Je garderai de notre cohabitation au laboratoire un très bon souvenir.

Je tiens également à remercier toutes les personnes du laboratoire Kastler Brossel qui m'ont accueilli, me permettant ainsi de mener à bien ce travail de thèse : Paul Indelicato, directeur du laboratoire, Monique Bonnamy, Laëtitia Morel, Annick Lamarck, Florence Thibout et Serge Begon.

Je ne saurais oublier mon cher ami et pianiste André Germinet, avec qui j'ai passé chaque semaine deux heures de répétitions de musique de chambre formidables qui m'ont permis de m'extraire de mon travail de recherche. Ces soirées merveilleuses m'ont certainement aidé à trouver mon équilibre entre physique et violoncelle. Un grand merci !

Enfin, je voudrais dire un merci tendre et amoureux à Viviana Gargiulo, ma compagne, qui m'a porté à bout de bras pendant toute cette période de rédaction, entre Rome et Paris. Elle a su transformer les pires moments de travail acharné en d'émouvants moments à deux.

---

# Introduction

---

Les effets quantiques en présence de désordre ont été étudiés de façon soutenue pendant quelques décennies, à la fois théoriquement et expérimentalement. De fait, ils jouent un rôle particulièrement important en physique de la matière condensée, où, en première approximation, un cristal est modélisé comme des électrons indépendants interagissant avec un réseau parfaitement périodique. Les travaux pionniers de Bloch et Zener [1, 2] ont cependant montré que la plupart des prévisions fondées sur ce modèle ne sont pas vérifiées dans les vrais cristaux. Par exemple, la théorie de Bloch prédit des fonctions d'onde électroniques entièrement délocalisées impliquant un transport balistique des électrons à travers le cristal. En outre, en présence d'un biais de potentiel, Zener prédit un mouvement oscillatoire (les oscillations de Bloch-Zener) due à des effets d'interférence quantique. Cela contredit des faits expérimentaux bien connus, au moins dans les conditions habituelles.

Une possible explication de ces contradictions est le fait que, d'évidence, il n'y a pas de cristaux parfaits : dans un véritable cristal, certains sites peuvent être occupés par des ions d'une nature différente, de manière aléatoire, ceci brisant la périodicité du réseau. En 1958, Anderson a considéré cette approche et postulé que l'effet dominant du désordre est de changer de façon aléatoire les énergies sur site. A partir de cette hypothèse, il a construit un modèle simple [3] d'un unique électron interagissant avec un réseau dans l'approximation des liaisons fortes :

$$\hat{H} = \sum_i V_i |i\rangle\langle i| + \sum_{j \neq i} t_{ij} |j\rangle\langle i|. \quad (1.1)$$

Ici,  $V_i$  sont les énergies associées aux états indexés liés aux sites  $j$  du réseau, et les éléments non-diagonaux  $t_{ij}$  désignent les éléments de matrice entre ces états. La diagonale de l'Hamiltonien correspond à l'énergie potentielle et la partie non-diagonale à l'énergie cinétique dans la description continue de l'espace. Le désordre est introduit en donnant aux énergies sur sites une distribution *aléatoire*. À partir de là, Anderson a montré que la fonction d'onde électronique peut être localisée par le désordre. Ceci contraste fortement avec les prévisions déduites du modèle de Bloch.

Le phénomène de localisation a sa manifestation la plus frappante dans les propriétés de transport des milieux désordonnés. Si les interactions entre particules sont négligeables, les états exponentiellement localisés ne peuvent pas contribuer au transport, à température nulle, puisque le couplage avec les phonons est négligeable. La localisation d'Anderson, en tant que conséquence de la présence de désordre, est l'un des ingrédients fondamentaux pour la compréhension de l'existence d'isolants et de métaux, et, en particulier, la transition entre les états isolant et métallique de la matière. Un isolant est associé à des états localisés du système alors qu'un métal affiche en général un transport diffusif associé à des états délocalisés.

Il a ensuite été montré que le modèle d'Anderson 3D présentait une transition de phase entre un régime localisé et un régime diffusif, bien connue sous le nom de transition métal-isolant d'Anderson [4]. Le lien entre la transition de phase métal-isolant induite par le désordre et les transitions de phase thermodynamiques du second-ordre a été établi, en reformulant le problème en termes du groupe de renormalisation [5, 6]. Sur la base de travaux de Wegner et d'idées de Thouless et Landauer [5–7], il a été possible de formuler ce que l'on appelle *la théorie d'échelle à un paramètre de la localisation* [8], l'une des approches les plus fructueuses de la transition d'Anderson. L'hypothèse essentielle de la théorie est que, près de la transition, une seule variable d'échelle suffit pour décrire le comportement critique.

Un résultat essentiel de la théorie d'échelle à un paramètre est que la transition d'Anderson n'existe qu'en dimension plus grande que deux. À une dimension, *tous* les états électroniques sont localisés, *quel que soit le degré de désordre*. En dimension deux, ils sont tous localisés, mais de façon marginale, c'est-à-dire avec une longueur de localisation exponentiellement grande (donc pouvant être beaucoup plus grande que la taille de l'échantillon) dans la limite de faible désordre. En dimension trois, si le désordre est en dessous d'un niveau critique, la localisation disparaît et l'on récupère un comportement métallique (conducteur). Par analogie avec les transitions de phase du second-ordre habituelles, la longueur de localisation  $\ell$  est supposée diverger au régime critique, suivant une loi de puissance :

$$\ell \sim (W - W_c)^{-\nu} , \quad (1.2)$$

avec  $\nu$  l'exposant critique de la longueur de localisation,  $W$  l'amplitude du désordre et  $W_c$  le désordre critique. L'hypothèse la plus fondamentale de cette théorie, l'hypothèse d'échelle à un paramètre, a été validée numériquement en utilisant une méthode de *finite-size scaling* développée dans [9, 10]. Cette technique, qui met en oeuvre une renormalisation spatiale effective, a permis d'établir numériquement l'existence d'une fonction d'échelle pour la longueur de localisation. Toutefois, les exposants critiques mesurés à l'aide de cette méthode,  $\nu \simeq 1.57$  [11, 12], ne sont pas compatibles avec le résultat  $\nu = 1$  obtenu à partir d'une approche auto-cohérente de la localisation basée sur des techniques diagrammatiques, telle que développée dans [13].

Dans le demi-siècle suivant sa naissance, le modèle d'Anderson est devenu un paradigme pour l'étude des effets quantiques en présence de désordre. Malgré cela, relativement peu de résultats expérimentaux sont disponibles, pour les raisons suivantes :

- Les sources de décohérence (collisions avec les phonons, etc.) sont difficiles à maîtriser. Or elles tuent les effets interférentiels, donc la localisation d'Anderson [14].

- Les électrons dans un cristal présentent des interactions mutuelles qui ne peuvent être, généralement, négligées. Ces interactions affectent la localisation de façon absolument non-triviale [15–17].

En outre, les fonctions d’onde électroniques ne sont pas directement observables et le phénomène de localisation ne peut être caractérisé expérimentalement qu’à partir de propriétés de transport des échantillons telles que leur conductance [18].

Il est donc intéressant de rechercher d’autres systèmes, qui peuvent présenter le phénomène de localisation d’Anderson, mais qui sont plus favorables à des études expérimentales. De fait, le concept de localisation d’Anderson n’est pas propre aux solides désordonnés mais peut s’appliquer à tout une gamme de systèmes où une onde se propage dans un milieu (suffisamment) désordonné. Un exemple typique est le cas des ondes classiques, telles que les rayonnements électromagnétiques [19–21], les ondes acoustiques [22, 23], les ondes élastiques [24], etc. Ces systèmes sont intéressants du fait qu’ils ne sont pas soumis aux effets d’interactions entre particules, et qu’ils permettent d’étudier d’autres caractérisations de la localisation : la dynamique [20, 24], la distribution spatiale de la probabilité de transmission (localisation transverse) [21, 24]. Malheureusement, dans le cas de ce type d’expériences de propagation d’ondes classiques, il est extrêmement difficile de parvenir à la condition de désordre suffisamment fort permettant l’observation de la localisation : l’on ne peut pas simplement augmenter indéfiniment la fraction volumique des diffuseurs (disposés de façon aléatoire) et la section efficace de collision est limitée. En outre, le transport des ondes classiques est affecté par le phénomène d’absorption, dont la signature est très difficile à distinguer de celle de la localisation.

Récemment, un autre type de système expérimental a été considéré : celui constitué d’atomes froids soumis à un potentiel lumineux. C’est ce type de système que nous considérons dans cette thèse.

## A Atomes froids soumis à un potentiel lumineux

Depuis une quinzaine d’années, la physique des atomes froids a progressé de façon si brillante, qu’elle est maintenant en mesure de traiter de problèmes fondamentaux de la physique de la matière condensée, permettant un *point de vue original* sur les phénomènes considérés [25, 26]. De nombreuses avancées d’importance ont permis cela :

- Premièrement, la physique atomique et l’optique quantique ont développé au fil des ans une ingénierie quantique très utile : préparation, manipulation, contrôle et détection de systèmes quantiques.
- Le refroidissement et le piégeage d’atomes, d’ions et de molécules a atteint des régimes de température très basse (nanoKelvin) et de précision extrême.
- Le refroidissement laser, combiné à la technique de refroidissement évaporatif, a permis l’observation de la condensation de Bose-Einstein en 1995.
- La force des interactions dans les nuages d’atomes froids peut être contrôlée via des résonances de Feshbach.
- Il est possible, avec des potentiels optiques, de changer la dimensionnalité de l’espace dans lequel les atomes froids se meuvent.

Dans la plupart des études récentes de la physique de la matière condensée avec des atomes froids, des potentiels optiques *périodiques* ont été considérés (voir par exemple [27]). Ceci est, de fait, la démarche la plus naturelle d'un point de vue expérimental, puisque de tels potentiels peuvent être générés de façon simple à l'aide de deux faisceaux lasers contre-propageants, formant une onde stationnaire qui agit comme un potentiel sinusoïdal pour les atomes froids. Ce n'est que très récemment que des potentiels lumineux désordonnés ont pu être mis au point issus de champs de tavelures (speckle). Soumettant des atomes froids (condensat de Bose-Einstein suffisamment dilué de façon à ce que les interactions soient négligeables) à un tel potentiel *uni-dimensionnel*, la localisation d'Anderson 1D a pu être observée [28]. La difficulté majeure dans cette expérience réside dans le caractère corrélé du potentiel aléatoire généré par le speckle. Ceci pose des contraintes expérimentales sérieuses rendant l'observation de la localisation délicate. À ce jour, il n'a pas été produit de potentiel optique aléatoire 2D ou 3D permettant la caractérisation des propriétés de localisation en dimension supérieure à un (voir [29] pour une étude théorique).

Nous présentons dans cette thèse un autre type de système constitué d'atomes froids soumis à un potentiel lumineux, permettant, entre autres, l'observation de la transition d'Anderson (qui a lieu en dimension trois). Notre système est très intéressant sur le plan expérimental, il permet en effet :

- de se placer dans des conditions où la décohérence et les interactions entre particules sont négligeables ;
- un contrôle fin du degré de désordre ;
- une étude *in situ* des propriétés de localisation, la localisation exponentielle de la fonction d'onde étant, par exemple, directement observable ;
- une caractérisation complète de la dynamique temporelle de la localisation.

## B Chaos quantique et désordre

Le système que nous considérons n'est pas, à proprement parlé, un système désordonné. C'est un système quantique chaotique, i.e. qui a sa dynamique classique chaotique (dans un certain régime de paramètres). Ce type de système a été considéré avec une grande attention à partir des années 80. Le phénomène de chaos quantique s'est avéré assez général. Il a été découvert que les statistiques de niveaux de billards balistiques, par exemple, dépendaient fortement de ce que la dynamique classique était chaotique ou régulière. Il a été montré dans de nombreuses simulations numériques que les fonctions de corrélation de systèmes chaotiques sont parfaitement décrites par la théorie des matrices aléatoires, alors que la statistique des niveaux de billards réguliers (intégrables) obéissent à la loi de Poisson [30].

Ainsi, l'on vient à conclure que les problèmes de désordre et les problèmes de chaos quantique sont équivalents, comme cela a été montré de façon rigoureuse dans certains cas (via la théorie de super-symétrie). En outre, ces problèmes sont très populaires, en ce moment, du fait du développement de la physique des objets mésoscopiques. Les récents succès de la nanotechnologie ont permis de créer de très petits dispositifs, et les modèles théoriques des billards quantiques peuvent être appliqués directement pour décrire des objets directement accessibles expérimentalement (points quantiques).

Un exemple bien connu de système quantique chaotique est le “Kicked Rotor” [31] dont l’Hamiltonien s’écrit :

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta \sum_n \delta(t - n) , \quad (1.3)$$

où  $p$  représente le moment angulaire du rotateur (le moment d’inertie étant pris égal à l’unité),  $\theta$  sa position,  $t$  le temps et  $K$  l’amplitude du forçage temporel. Ce système est des plus simples, puisqu’il n’a qu’un seul degré de liberté. Mais, on sait depuis la fin du XIXe siècle qu’une dynamique d’une grande complexité peut résulter d’un système simple possédant un très petit nombre de degrés de liberté, pourvu qu’il possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Le Kicked Rotor possède cette propriété, et bien plus encore : sa dynamique est, dans un certain régime de paramètres, une diffusion chaotique, i.e. est une marche pseudo-aléatoire (pseudo au sens où elle est déterministe), en tous points semblable à celle d’une particule classique dans un milieu désordonné. En un sens, le chaos joue dans ce système le rôle d’un désordre dynamique, et l’amplitude du forçage  $K$  contrôle le degré du désordre. Le Kicked Rotor a été montré formellement équivalent à un système désordonné, ce *de façon parfaitement rigoureuse* [32]. Il présente, dans le régime quantique, un phénomène de localisation, appelé “localisation dynamique”, qui est l’analogue de la localisation d’Anderson à une dimension pour les systèmes désordonnés [33]

Le Kicked Rotor est tout à fait propice aux études expérimentales avec des atomes froids soumis à un potentiel lumineux. Le potentiel sinusoïdal  $K \cos \theta$  [voir équation (1.3)] est un potentiel lumineux “naturel” souvent utilisé dans les expériences avec atomes froids (on parle généralement de réseau optique) : deux faisceaux lasers contre-propageants suffisent à créer une onde stationnaire qui est perçue par les atomes comme un potentiel effectif. Les impulsions temporelles d’onde stationnaire, i.e. les impulsions lasers, sont simplement générées grâce à des modulateurs acousto-optiques. Ainsi, ce système a pu être réalisé très tôt, en 1995, par le groupe de M. Raizen (Austin, Texas), avec des atomes de Césium froids (le nuage n’étant pas condensé, mais suffisamment dilué pour que les interactions soient négligeables). L’observation expérimentale de la localisation dynamique dans ce système qui a suivi cette réalisation [34] constitue la première observation de la localisation d’Anderson avec des ondes de matière atomiques.

## C Quasi-périodicité temporelle et dimensionnalité effective

Un autre grand intérêt de ce type de système dynamique est qu’il semble que la dimensionnalité puisse y être “réglée” de façon très simple. Ainsi, il ne serait point nécessaire de réaliser un Kicked Rotor 3D pour observer les propriétés de localisation tri-dimensionnelle. Il suffirait seulement de considérer une généralisation quasi-périodique à trois fréquences du Kicked Rotor, par exemple celle-ci :

$$H_{\text{qp}} = \frac{p^2}{2} + K[1 + \varepsilon \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)] \cos \theta \sum_n \delta(t - n) , \quad (1.4)$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les fréquences de modulation temporelle de l’amplitude du forçage, vérifiant une certaine condition d’incommensurabilité. Ceci a été suggéré par des études théoriques et numériques [35] qui remontent à plus de vingt ans, et qui ont conduit à

l’observation numérique d’une transition métal-isolant du type de celle d’Anderson. Cette correspondance entre localisation dynamique dans un système quasi-périodique à  $d$  fréquences incommensurables et localisation d’Anderson en dimension  $d$  a pu être démontrée de façon rigoureuse dans le régime dit de localisation faible, i.e. à faible désordre et à temps pas trop long [36].

## D Limitations expérimentales

Malgré le fait que le Kicked Rotor quasi-périodique soit très facile à réaliser à partir du dispositif expérimental correspondant au Kicked Rotor périodique avec atomes froids, la transition d’Anderson n’a pu, jusqu’à présent, être observée expérimentalement avec ce système. De fait, les simulations numériques précédemment rapportées dans [35] semblent montrer qu’il faille attendre des temps très longs avant de pouvoir observer un passage “net” d’un régime exponentiellement localisé à un régime diffusif, signature de la transition métal-isolant. Ces temps extrêmement longs dépassent de loin les limites expérimentales, limites imposées, entre autres, par un temps de cohérence de phase fini dans le cas expérimental. Ceci semble rendre caduque toute tentative d’étude expérimentale de la transition avec ce système.

Il n’en est rien, comme nous le montrons dans cette thèse. Comment dépasser la nécessité des temps longs qui rendent l’observation expérimentale de la transition inenvisageable ? D’abord en cherchant la signification physique profonde des effets de temps finis qui affectent les phénomènes de transport/localisation observés avec le Kicked Rotor quasi-périodique : ils sont analogues à des effets de taille finie bien connus des numériciens étudiant les transitions de phase, en particulier celle d’Anderson [9,10]. Dès lors, l’on comprend assez facilement l’origine des difficultés d’observation de la transition à temps finis. Une transition de phase n’est, de fait, observable qu’à la limite thermodynamique, soit, dans notre cas, lorsque  $t \rightarrow \infty$  (correspondant à  $L \rightarrow \infty$  où  $L$  la dimension caractéristique de l’échantillon simulé).

## E Caractérisation de la transition d’Anderson

Les effets de temps fini empêchent, certes, l’observation *directe* (“naïve”) de la transition de phase, cependant ils vont nous permettre une caractérisation beaucoup plus profonde et complète de la transition. La transition de phase d’Anderson étant du second ordre, ses propriétés sont extrêmement riches, et ne se limitent pas à la divergence de la longueur de localisation en loi de puissance [voir Eq. (1.2)] :

$$\ell \sim |K_c - K|^{-\nu}, \quad (1.5)$$

où  $K_c$  est la valeur critique du paramètre  $K_c$  qui sépare le régime localisé  $K < K_c$  du régime diffusif  $K > K_c$ . Dans le régime critique, la théorie de la renormalisation prédit l’existence de lois d’échelle caractéristiques de la transition, qui, dans le cas de la transition d’Anderson, sont sensées être à un paramètre [8–10]. Nous montrons dans cette thèse que ces lois d’échelle peuvent être observées en considérant la dynamique temporelle de notre

système en fonction du désordre. Ceci a permis de donner la première vérification expérimentale directe de la théorie d'échelle à un paramètre, ainsi que la première détermination expérimentale non-ambigüe de l'exposant critique de la longueur de localisation  $\nu$ . Cette caractérisation expérimentale complète de la transition d'Anderson (voir notre article [37] reproduit en section D du chapitre 5) est trouvée compatible avec celle effectuée à partir de simulations numériques du véritable modèle d'Anderson 3D [12].

## F Classe d'universalité du Kicked rotor quasi-périodique

À ce stade, l'équivalence entre le Kicked Rotor quasi-périodique et les conducteurs 3D désordonnés a encore le statut d'une conjecture (voir [36]). Une réponse rigoureuse à la question de savoir si ce système dynamique présente les mêmes phénomènes critiques - c'est-à-dire appartient à la même classe d'université - que le véritable modèle d'Anderson 3D n'a pas encore été donnée. Est-ce qu'un simple système dynamique à trois fréquences peut imiter *exactement* le comportement critique de conducteurs électroniques 3D désordonnés? Dans cette thèse, nous montrons que la réponse est affirmative. Pour ce faire, une étude numérique fine et précise du comportement critique du Kicked Rotor quasi-périodique est nécessaire. Nous avons mené une telle étude, avec *le même soin* que celui accordé aux études les plus élaborées du comportement critique du véritable modèle d'Anderson 3D [12, 38, 39]. Le fait que les deux modèles donnent le même exposant critique de la longueur de localisation  $\nu$  avec de très faibles incertitudes comparables implique qu'ils appartiennent à la même classe d'universalité (orthogonale) [40].

## G Fonction d'onde critique

Une des spécificités du Kicked Rotor quasi-périodique est qu'il permet une étude fine, tant sur le plan expérimental que numérique, de la dynamique des fonctions d'onde (de leur modules carrés) dans les différents régimes de la transition. Ceci ouvre des perspectives très intéressantes, particulièrement dans le cas du régime critique de la transition d'Anderson où la fonction d'onde aurait des propriétés tout-à-fait non triviales et jusqu'ici imparfaitement explorées [41, 42]. Des études numériques de la dynamique critique ont été menées dans des systèmes désordonnés 3D [42, 43], cependant elles ont été très limitées par les longs temps de calcul nécessaires à la simulation d'échantillons 3D. Les simulations numériques du Kicked Rotor quasi-périodique, système uni-dimensionnel, ne sont pas sujettes à ce problème. En outre, aucune étude expérimentale de la dynamique de la fonction d'onde critique n'a été menée à ce jour.

Nous présentons dans cette thèse une étude théorique analytique, numérique et expérimentale, de la fonction d'onde critique à la transition d'Anderson. Nous donnons sa forme et sa dynamique, telle que déduite de la théorie auto-cohérente de la localisation de Vollhardt et Wölfle [44], théorie transposée au cas du Kicked Rotor. Nos prédictions sont vérifiées dans une très bonne approximation par les données numériques et expérimentales. Des déviations à la théorie auto-cohérente sont observées, numériquement, dans la limite des temps longs. Nous montrons que c'est une des caractéristiques attendues de la dynamique



critique, qui reflète le caractère multifractal du régime critique. La multifractalité n'est pas contenue dans la théorie auto-cohérente.

Cette dernière étude montre encore une fois la parfaite analogie du Kicked Rotor (1D et 3D périodiques ou quasi-périodique) avec les systèmes désordonnés usuels. La théorie auto-cohérente [44], une des théories les plus fondamentales de la localisation, non seulement se transpose au cas du Kicked Rotor, mais permet également de très bien rendre compte des phénomènes observés dans ce système.

## H Plan de la thèse

Cette thèse tente d'établir un lien entre différents domaines de la physique : la physique mésoscopique des systèmes désordonnés, le chaos quantique, et la physique des atomes froids soumis à un potentiel lumineux. Nous croyons utile, de ce fait, de rappeler, en premier lieu, les éléments clés de ces domaines qui ont une implication dans notre étude. Ces rappels sont essentiellement contenus dans les chapitres 2, 3 et 4.

Dans un premier temps, nous donnons un bref aperçu de la transition d'Anderson dans son contexte original, celui des systèmes désordonnés : ceci constitue le chapitre 2 de notre thèse. Nous décrivons les modèles théoriques les plus simples et les plus fondamentaux, c'est-à-dire ceux incorporant uniquement les ingrédients nécessaires au développement des théories de la localisation. Ensuite, nous donnons, sans prétention à l'exhaustivité, quelques caractérisations utiles de la localisation qui conviennent mieux dans le cas d'une étude théorique, numérique ou expérimentale. Puis, nous rappelons les deux approches théoriques fondamentales de la localisation, la théorie auto-cohérente, et la théorie d'échelle. Enfin, nous dressons un état de l'art des observations de la transition d'Anderson, concluant que ces observations sont, à tout le moins, imparfaites, ce qui motive notre étude.

Au chapitre 3 suivant, nous présentons le système paradigmatique du chaos quantique à la base de notre étude : le Kicked Rotor, dans sa version originale, i.e. périodique, uni-dimensionnel, atomique. Nous discutons de sa dynamique classique chaotique, et du phénomène de localisation dynamique observé dans le régime quantique. Nous rappelons l'équivalence formelle de ce système avec le modèle d'Anderson 1D. Puis nous discutons de certains aspects de transport/localisation spécifiques à ce système : résonance quantique et corrélations à courte portée du potentiel pseudo-désordonné. Enfin, nous montrons à quelle classe de symétrie appartient ce système : celle des systèmes invariants par renversement du temps. Toutes ces discussions théoriques sont d'importance pour la suite.

Au chapitre 4, nous décrivons le dispositif expérimental mis en place par l'équipe de J.-C. Garreau et P. Szriftgiser du laboratoire PHLAM à Lille, permettant de réaliser un Kicked Rotor avec des atomes froids soumis à un potentiel lumineux en onde stationnaire pulsée. Nous insistons sur les imperfections et les limitations du dispositif expérimental et précisons sous quelles conditions la localisation dynamique peut être observée avec ce dispositif. Ces contraintes expérimentales ont une importance fondamentale dans le travail présenté dans la suite.

Le chapitre 5 représente la contribution majeure de notre travail de thèse : contribution à l'observation expérimentale de la transition d'Anderson avec des ondes de matière atomique. Nous décrivons le système considéré dans cette étude, le Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences, et explicitons sa relation avec les systèmes désordonnés 3D. Nous donnons l'interprétation physique profonde des limitations de durée finie de l'expérience. Nous décrivons la méthode de finite-time scaling, méthode de renormalisation temporelle effective, que nous avons mise en oeuvre pour dépasser les limitations expérimentales. Les caractérisations expérimentale et numérique complètes de la transition sont ensuite rapportées, qui sont trouvées compatibles entre elles. Nous donnons la détermination expérimentale de l'exposant critique de la longueur de localisation, quantité la plus fondamentale caractérisant la transition d'Anderson. La valeur mesurée expérimentalement est en accord avec la valeur obtenue par des simulations numériques du modèle d'Anderson 3D.

Au chapitre 6, nous montrons que le Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences, considéré au chapitre précédent, appartient à la même classe d'universalité que le modèle d'Anderson 3D symétrique par renversement du temps. Nous rapportons une étude numérique fine de son comportement critique, nous permettant de caractériser si, effectivement, il ne dépend pas des paramètres déterminant le pseudo-désordre. Nos conclusions sont positives : la valeur de l'exposant critique  $\nu$  est universelle, i.e. ne dépend pas des détails microscopiques du pseudo-désordre, et est identique à celle du modèle d'Anderson 3D.

Le chapitre 7 décrit notre étude théorique analytique et numérique de la fonction d'onde critique à la transition d'Anderson, cette étude étant accompagnée d'une étude expérimentale effectuée par l'équipe de J.-C. Garreau et P. Szriftgiser. En annexe, nous donnons une théorie diagrammatique perturbative du transport quantique dans le Kicked Rotor au régime de faible désordre, prolongée par une théorie auto-cohérente permettant de décrire le régime de fort désordre, i.e. la localisation d'Anderson et la transition d'Anderson. Nous déduisons de cette théorie la forme et la dynamique de la fonction d'onde critique pour le Kicked Rotor quasi-périodique à la transition d'Anderson. Nos prédictions théoriques vérifient la propriété d'invariance d'échelle attendue à la transition, qui se traduit par une loi d'échelle pour la fonction d'onde critique. Les données expérimentales et numériques sont trouvées en excellent accord avec nos formes analytiques. Néanmoins, à temps longs, des déviations à la théorie auto-cohérente sont observées, numériquement, qui reflètent le caractère multi-fractal du régime critique, propriété caractéristique de ce régime.

Le chapitre 8 conclut cette thèse. Nous y donnons quelques perspectives de recherches futures, tant au point de vue théorique et numérique, qu'expérimental.



---

# Transition d'Anderson dans les systèmes désordonnés

---

---

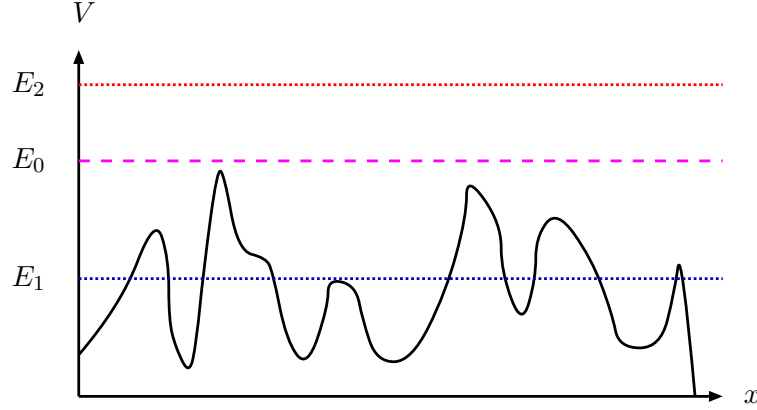
## Sommaire

---

Dans ce mémoire de thèse, nous rapportons l'observation, avec des atomes froids, d'une transition de phase quantique métal-isolant, la transition d'Anderson, prédite à l'origine pour les systèmes électroniques désordonnés. Nous croyons utile de replacer notre étude dans son contexte original.

Le désordre joue un rôle particulièrement important en physique de l'état condensé. En première approximation, les solides sont modélisés par des électrons indépendants plongés dans un potentiel créé par le réseau cristallin. Cette formulation en termes d'électrons indépendants peut paraître à première vue injustifiée, l'énergie d'interaction de Coulomb des électrons étant en effet du même ordre que leur énergie cinétique. Néanmoins, comme formulé par Landau dans sa théorie des liquides de Fermi, on peut repenser ce système d'électrons avec interactions mutuelles comme constitué de quasi-particules (excitations collectives) n'interagissant pas entre elles, ces particules ayant toutes les caractéristiques des électrons, excepté une masse effective différente. On peut donc considérer les (quasi) électrons comme indépendants. S'ils sont plongés dans un potentiel parfaitement périodique formant un cristal, alors leur fonction d'onde électronique est une onde de Bloch parfaitement délocalisée. Ceci implique que ces électrons ont un mouvement balistique le long du cristal : un cristal parfait est ainsi, le plus souvent (i.e. lorsque la bande n'est pas complètement remplie), un métal. Qu'advient-il si le réseau n'est pas parfaitement ordonné ?

Soit le cas d'une particule classique se mouvant dans un potentiel aléatoire  $V(x)$  à une dimension (figure 2.1). Pour faire simple, prenons le potentiel restreint à des valeurs inférieures à  $E_0$ . Dans ce cas, l'on peut affirmer simplement, à partir de considérations énergétiques, si la particule classique est localisée ou non : Si l'énergie totale de la particule  $E$  est inférieure à  $E_0$ , alors la particule est confinée dans un interval fini, au sein d'un



**Fig. 2.1:** Particule classique dans un potentiel 1D désordonné. Le mouvement de la particule est restreint à des intervalles finis lorsque  $E_1 < E_0$ . Pour  $E_2 > E_0$  le mouvement n'est pas restreint.

des puits de potentiel. Dans l'autre cas,  $E > E_0$ , la particule peut se mouvoir librement sur tout l'ensemble de l'axe des  $x$ .

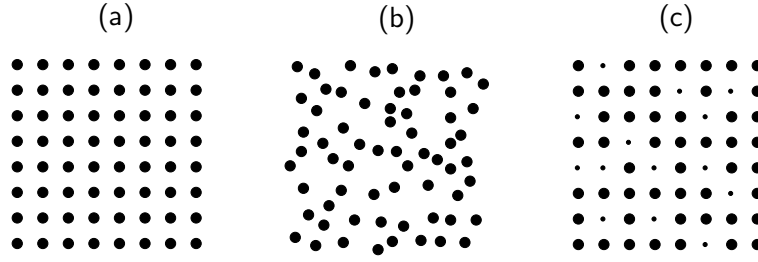
Pour une particule quantique telle qu'un électron, il est plus compliqué de distinguer les états possibles. D'un côté, les barrières de potentiel ne peuvent pas confiner de façon absolue la particule dans un puits de potentiel du fait de l'effet tunnel. Cet effet peut même conduire à une délocalisation complète de particules classiquement localisées. D'un autre côté, pour  $E > E_0$ , des diffusions successives sur les fluctuations du potentiel peuvent éventuellement conduire à des interférences destructives telles que la particule classiquement délocalisée devienne localisée. Au delà de la localisation dans le potentiel, c'est la compétition entre les effets tunnel et d'interférence qui détermine si oui ou non un état est localisé. Un exemple de délocalisation par effet tunnel, bien que ne correspondant pas à un système désordonné, sont les états de Bloch d'un cristal parfait. Un exemple de localisation par interférence quantique est la localisation d'Anderson.

La localisation d'Anderson traite de la nature de la fonction d'onde d'un unique électron plongé dans un potentiel désordonné. En 1958, Anderson montra [3] que cette fonction d'onde peut être fortement altérée si le désordre est suffisamment important. La vision traditionnelle de ce problème était alors que les diffractions causées par le potentiel désordonné causaient la perte de la cohérence de phase des ondes de Bloch sur une longueur caractéristique égale au libre parcours moyen. Néanmoins, les fonctions d'onde restaient délocalisées tout le long de l'échantillon. Anderson montra que, si le désordre est très fort, les fonctions d'onde peuvent être localisées, en ce sens que l'enveloppe de la fonction d'onde décroît exponentiellement depuis un certain point de l'espace, i.e. :

$$|\psi(r)| \sim \exp(-|r - r_0|/\ell) , \quad (2.1)$$

où  $\ell$  est la longueur de localisation.

Quels sont les ingrédients nécessaires à la localisation d'Anderson ? Quelles observables permettent de la caractériser ? Quels en sont les mécanismes ? Et qu'en est-il des observations expérimentales ? Ce sont ces questions auxquelles nous tentons de répondre dans ce chapitre.



**Fig. 2.2:** Différentes sortes de désordre qui peuvent être modélisées en partant du cas limite parfaitement ordonné (a). Des atomes identiques situés en des positions aléatoires représente un désordre structurel (b). Deux types d'atomes différents positionnés sur les sites d'un réseau parfaitement ordonné représente le cas le plus simple d'un désordre compositionnel (c).

## A Modèles simples de systèmes désordonnés

Il n'existe pas de cristal parfaitement ordonné. Il apparaît toujours des altérations dues à la présence d'impuretés, de dislocations, et autres défauts. Tant que leur concentration est faible, on peut continuer à utiliser les concepts développés pour les systèmes invariants par translation comme point de départ. Néanmoins, lorsque la concentration de ces défauts est grande, il est nécessaire de laisser cette invariance par translation et de développer de nouvelles méthodes. Pour ce faire, on a intérêt à considérer des modèles les plus simples possibles, incorporant seulement les ingrédients nécessaires. Ce sont ces modèles de systèmes désordonnés que nous présentons dans cette section.

Considérons un électron interagissant avec un ensemble d'atomes positionnés (i.e. fixes) en des sites  $\mathbf{R}_j$ . Ce système est décrit par l'Hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \sum_{j=1}^N V_j(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{R}_j) , \quad (2.2)$$

où  $\hat{\mathbf{p}}$  est l'opérateur impulsion,  $m$  la masse (effective) de l'électron et  $V_j$  le potentiel d'interaction de l'électron avec l'atome  $j$  situé en  $\mathbf{R}_j$ . Un cristal parfait correspond au cas où les positions  $\mathbf{R}_j$  et les potentiels  $V_j$  forment un réseau parfaitement périodique. Partant du cristal parfait, des modèles de désordre peuvent être élaborés de différentes façons, comme illustré en figure 2.2.

### A.1 Modèle de désordre structurel

Des modèles de systèmes vitreux ou de semi-conducteurs amorphes, peuvent être obtenus en relaxant la structure du réseau (désordre structurel), tout en prenant  $V_j = V$  (les atomes sont identiques) :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \sum_{j=1}^N V(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{R}_j) . \quad (2.3)$$

La distribution spatiale des atomes est aléatoire, donnée par une distribution de probabilité  $\mathcal{P}(\{\mathbf{R}_j\})$ , qui, dans le cas le plus simple de  $N$  atomes statistiquement indépendants, dans un volume  $\Omega$ , s'écrit :

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{R}_j\}) = \Omega^{-N} . \quad (2.4)$$

Ce modèle, particulièrement simple, est très utile dans le cadre de la théorie de la localisation faible, qui décrit, dans la limite perturbative de faible désordre, les premiers effets interférentiels quantiques sur le transport diffusif (voir [45] et section C.1.1 de ce chapitre). Il permet également de décrire la localisation d'Anderson via la théorie auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle [44].

## A.2 Modèle d'Anderson

Les alliages aléatoires de différents composants sont un autre exemple de solide désordonné. Ils peuvent être modélisés en considérant les composants différents comme placés de façon aléatoire sur un réseau régulier : dans ce cas, les potentiels  $V_j$  sont tirés au hasard parmi l'ensemble  $\{V_A, V_B, \dots\}$  des potentiels d'interaction de l'électron avec les composants  $A, B, \dots$ .

Un tel modèle se formule simplement dans l'approximation des liaisons fortes. Cette approximation considère la limite où l'électron est fortement lié aux sites. Au voisinage d'un de ces sites, l'électron est caractérisé par une certaine fonction d'onde que nous notons  $|i\rangle$ . L'énergie associée à cette fonction d'onde attachée au site  $i$  est notée  $V_i$ . Si l'électron est fortement lié aux sites, alors les fonctions d'ondes attachées à différents sites ont un recouvrement négligeable. Le recouvrement le moins faible est bien sûr entre des plus proches voisins. Ce recouvrement implique que les fonctions d'ondes ne sont pas orthogonales, i.e. ne sont pas des états propres de l'Hamiltonien  $\hat{H}$  (2.2), soit encore, que les éléments  $t_{ij} = \langle j|\hat{H}|i\rangle$  sont non nuls. L'approximation des liaisons fortes consiste à retenir ces éléments de matrice tout en considérant que le recouvrement direct entre les fonctions d'onde est nul. Physiquement,  $t_{ij}$  représente l'amplitude de transition par effet tunnel d'une particule du site  $i$  au site  $j$ . L'Hamiltonien devient :

$$\hat{H} = \sum_i V_i |i\rangle\langle i| + \sum_{j \neq i} t_{ij} |j\rangle\langle i|. \quad (2.5)$$

Le cas le plus simple est celui d'un désordre purement diagonal avec des sites statistiquement indépendants :

$$\mathcal{P}(\{V_i\}) = \prod_i p(V_i), \quad (2.6)$$

et des transitions possibles uniquement vers les plus proches voisins :

$$t_{ij} = \begin{cases} t & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont plus proches voisins} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.7)$$

Deux exemples sont l'alliage complètement aléatoire de deux composants (A, B) :

$$p(V_i) = \frac{1}{2} [\delta(V_i - V_A) + \delta(V_i - V_B)], \quad (2.8)$$

et le modèle d'Anderson [3]

$$p(V_i) = \frac{1}{W} \Theta \left( \frac{1}{2}W - |V_i| \right), \quad (2.9)$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside. Ce modèle, considéré par Anderson dans son article fondateur [3], décrit un alliage d'une infinité de composants. D'autres distributions  $p(V_i)$

sont souvent considérées telles que les distribution Gaussienne ou Lorentzienne. Dans tous les cas, le ratio  $W/t$  de la largeur  $W$  de ces distributions sur l'amplitude de transition  $t$ , caractérise à lui seul le degré de désordre du modèle.

Ces modèles discrets tels que le modèle d'Anderson sont particulièrement pratiques pour les simulations numériques des systèmes désordonnés [46]. Le désordre est généralement considéré comme décorrélé et isotrope. Les effets des corrélations et de l'anisotropie peuvent être étudiés dans un second temps.



## B Différentes caractérisations de la localisation

Maintenant que nous avons défini les modèles les plus simples, et avant de traiter de façon théorique des mécanismes conduisant au phénomène de localisation, nous souhaitons aborder la question suivante : Comment caractériser l'état localisé d'un système ? Cette question est importante du fait que, en quelque sorte, chacun a sa propre "définition" de la localisation, suivant qu'il travaille dans une perspective théorique, numérique ou expérimentale. Les points de vue sur ce phénomène qu'est la localisation sont souvent différents, du fait que toutes les observables ne sont pas accessibles, en particulier expérimentalement. Ainsi, il est difficile d'observer directement la localisation des fonctions d'onde électroniques dans les solides (notons néanmoins que des états localisés et délocalisés de l'effet Hall quantique ont pu être observés par microscopie à effet tunnel en dimension deux [47]). En revanche, les propriétés de transport électronique peuvent être sondées, qui sont affectées par la localisation. Nous croyons important de préciser quelques unes de ces caractérisations également parce que l'étude que nous présentons dans ce mémoire permet un point de vue original sur la localisation.

Avant de donner quelques caractérisations utiles de la localisation, une remarque s'impose. Comme nous avons remplacé le système considéré par un ensemble statistique en introduisant des densités de probabilité, toutes les quantités physiques caractérisant la localisation considérées doivent être moyennées sur les différentes configurations du désordre. Néanmoins, cela ne peut donner des résultats qui ont une signification physique simple que si ces quantités sont auto-moyennantes, i.e. si :

$$\overline{X} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} X(\Omega) , \quad (2.10)$$

où  $\Omega$  est le volume du système considéré. Dans le cas du problème de localisation, cette propriété n'est pas vérifiée de façon triviale (voir l'article de revue [18]). Si la quantité n'est pas auto-moyennante, on peut certes définir et mesurer sa moyenne, mais elle ne représentera pas la valeur typique, i.e. la plus probable, de cette quantité ; il faut, dans ce cas, en principe considérer la distribution entière de la quantité considérée.

Les fonctions d'onde dans un milieu désordonné peuvent être caractérisées par différents paramètres tels que leur extension moyenne, la fraction du volume du système qu'elles occupent, les corrélations spatiales entre leurs amplitudes et phases, et, *indirectement*, par leurs propriétés de transport. Comme expliqué par la suite, ces propriétés de transport sont intimement reliées aux corrélations spatiales des amplitudes et de leur comportement asymptotique.

### B.1 Comportement asymptotique des états propres

D'un point de vue théorique ou numérique, on peut considérer tout d'abord les états propres de l'Hamiltonien d'un système désordonné.

Le comportement asymptotique d'un état propre  $|\Psi_E\rangle$  localisé peut être décrit par la longueur de décroissance exponentielle de son enveloppe, i.e. la longueur de localisation  $\ell$ ,

telle que :

$$|\Psi_E(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)| \sim e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/\ell}, \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{r}_0$  est le site au voisinage duquel l'état est localisé.  $\ell \rightarrow \infty$  correspond au cas d'un état délocalisé.

Il faut ici prendre garde aux fluctuations spatiales des états propres [48]. En outre, cette définition n'est pas très pratique, puisque son application nécessite le calcul des états propres par diagonalisation de  $\hat{H}$ , ce qui n'est pas aisé numériquement, surtout lorsque l'on considère un système de dimensionnalité  $d \geq 3$ .

Diagonalisant directement  $\hat{H}$ , on peut également considérer les propriétés du spectre de  $\hat{H}$ . La localisation d'Anderson est associée à un spectre dense et discret ("pure point spectrum"), alors qu'un spectre continu ("absolutely continuous spectrum") est la signature d'un régime délocalisé [49]. D'un point de vue statistique, la localisation peut être caractérisée par une distribution Poissonienne de l'écart entre niveaux voisins (voir section E du chapitre 3 et [33]) : deux états exponentiellement localisés en des sites distants de plus de  $\ell$  ont des corrélations spatiales exponentiellement faibles, ils montrent ainsi une répulsion de leurs niveaux également exponentiellement faible.

Il est plus utile de définir la longueur de localisation en rapport avec les propriétés de transport, comme nous allons le faire dans la suite.

## B.2 Probabilité de diffusion quantique

La localisation se reflète sur la "probabilité de diffusion quantique" :

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = |\langle \mathbf{r}' | G^R(E) | \mathbf{r} \rangle|^2, \quad (2.12)$$

où la fonction de Green retardée  $\hat{G}^R(E)$  associée au système décrit par  $\hat{H}$ , s'écrit comme le propagateur :

$$\hat{G}^R(E) = \frac{1}{E + i0 - \hat{H}}. \quad (2.13)$$

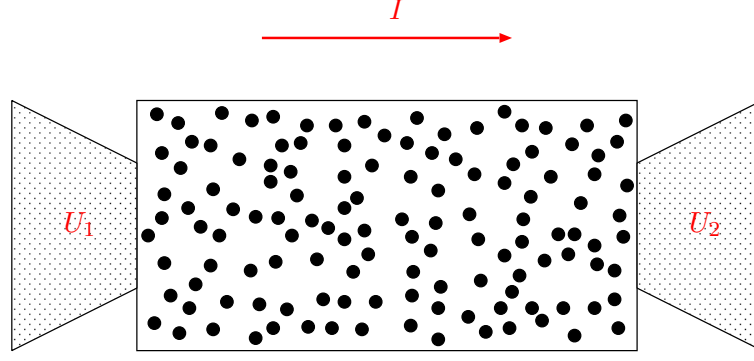
Il faut noter que la moyenne sur le désordre se fait sur l'intensité (module carré de la fonction de Green) et non sur la fonction de Green elle-même. Ceci a une importance capitale, et nous reviendrons là-dessus par la suite (en section C.1 de ce chapitre). La probabilité de diffusion quantique  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$  donne la distribution spatiale à  $t \rightarrow \infty$  d'un état initialement piqué en  $\mathbf{r}$  et d'énergie  $E$ .

La longueur de localisation peut être déterminée à partir de la décroissance exponentielle de la probabilité de diffusion quantique via :

$$\frac{2}{\ell} = - \lim_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \rightarrow \infty} \frac{\ln P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (2.14)$$

Le facteur deux dans la définition de la longueur de localisation vient du fait que l'on considère ici les propriétés de localisation sur la distribution spatiale :

$$|\psi(\mathbf{r}', t \rightarrow \infty)|^2 \sim \exp(-2|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/\ell), \quad (2.15)$$



**Fig. 2.3:** Vue schématique d'une étude expérimentale des propriétés de conductance d'un conducteur désordonné.

que l'on souhaite faire correspondre aux propriétés de localisation sur les états propres, équation (2.11).

Cette caractéristique du transport qu'est la probabilité de diffusion quantique revêt une importance fondamentale dans la théorie de localisation faible. Elle peut en outre être généralisée de manière à décrire les effets de la dynamique de la localisation (voir [45] et section C.1.1 de ce chapitre). Néanmoins, elle n'est pas directement observable dans les solides désordonnés.

### B.3 Conductance

Lorsque l'on considère le cas d'un solide désordonné, on n'a pas accès direct à la quantité de transport précédemment définie, la probabilité de diffusion quantique : ceci nécessiterait d'avoir des sondes locales du transport quantique. Le transport des électrons au travers d'un échantillon désordonné est généralement caractérisé par des quantités de transport globales telles que la résistance  $R$  ou la conductance  $G$  :

$$G = I/U = R^{-1} , \quad (2.16)$$

où  $U$  est égal à la différence des potentiels électro-chimiques des contacts 1 et 2,  $U = U_1 - U_2$  et  $I$  est le courant injecté de 1 vers 2 (voir figure 2.3).

La conductance  $G$  est simplement reliée à la conductivité  $\sigma$  par la loi d'Ohm, qui s'exprime sous la forme :

$$G = \sigma L_{\perp}^{d-1} / L , \quad (2.17)$$

dans le cas où l'échantillon de solide désordonné a la forme d'un barreau de longueur  $L$  et de section  $L_{\perp}^{d-1}$ . Or la conductivité s'exprime directement comme la variance de la probabilité de diffusion quantique via la formule de Kubo [18] :

$$\sigma \sim \int_{\Omega} d^d \mathbf{r} \, x^2 P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) , \quad (2.18)$$

Ainsi, la conductance permet de sonder le caractère localisé : elle décroît exponentiellement en fonction de la longueur du barreau  $L$  :

$$G(L) \sim e^{-2L/\ell} . \quad (2.19)$$

Il faut noter que l'on a considéré ici la limite de température nulle.

## B.4 Exposant de Lyapunov

Il existe une caractérisation de la localisation qui est extrêmement utile dans les simulations numériques. Pour des systèmes 1D et quasi-1D (e.g. un barreau de longueur  $L$  et de section  $L_\perp^{d-1}$  avec  $L \gg L_\perp$ ), les propriétés de localisation peuvent être calculées très efficacement à partir du comportement limite de produits de matrices aléatoires [50].

Considérons l'équation aux valeurs propres  $\hat{H}|\Psi_E\rangle = E|\Psi_E\rangle$  pour un modèle d'Anderon 1D d'Hamiltonien  $\hat{H}$  donné par l'équation (2.5). Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(E - V_i)a_i = (a_{i+1} + a_{i-1}) , \quad (2.20)$$

où  $a_i$  représente l'amplitude de la fonction d'onde  $|\Psi_E\rangle$  au site  $i$ ,  $a_i = \langle i|\Psi_E\rangle$  du réseau. On a pris, sans perte de généralité, l'amplitude de transition entre plus proches voisins  $t$  égale à l'unité,  $t = 1$ . L'équation (2.20) précédente peut être réécrite sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ a_i \end{pmatrix} = T_i \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i-1} \end{pmatrix} , \quad (2.21)$$

où la matrice de transfert  $T_i$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} E - V_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Ainsi reformulé, le problème est celui d'un système dynamique décrit par la matrice aléatoire  $T_i$  (aléatoire du fait de la présence de  $V_i$  qui est distribué de façon aléatoire et décorrélée).

Partant d'un état initial  $(a_1, a_0)$ , la méthode de la matrice de transfert permet de calculer les amplitudes  $a_i$  :

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ a_i \end{pmatrix} = Q_i \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} , \quad (2.23)$$

au moyen du produit  $Q_i$  des matrices de transfert aléatoires  $T_{i'}$  :

$$Q_i = \prod_{i'=1}^i T_{i'} . \quad (2.24)$$

Une propriété fondamentale est que le produit  $Q_i^\dagger Q_i$  obéit à une loi des grands nombres lorsque la longueur  $i$  tend vers l'infini. Le théorème d'Oseledec [51] généralise la loi des grands nombres aux produits de matrices aléatoires et assure l'existence d'une matrice asymptotique :

$$\Gamma = \lim_{i \rightarrow \infty} (Q_i Q_i^\dagger)^{1/2i} , \quad (2.25)$$

ayant pour valeurs propres  $\exp \gamma$  et  $\exp(-\gamma)$  où  $\gamma > 0$  [52] est l'exposant de Lyapunov (ceci est vérifié sous des conditions très générales [53]). Ceci exprime le caractère auto-moyennant du produit  $Q_i^\dagger Q_i$ . Cette propriété est particulièrement intéressante du fait que la conductance adimensionnée *typique* s'exprime directement en fonction de ce produit [54, 55] :

$$g_L = \frac{1}{4\text{Tr}(Q_L^\dagger Q_L - 1)} . \quad (2.26)$$

Il faut noter que la conductance typique, i.e. la valeur de la conductance la plus probable, n'est pas la conductance moyenne. La conductance est une quantité fluctuante en fonction des réalisations du désordre, et la valeur moyenne de cette quantité ne donne pas nécessairement une bonne image de ce que l'on obtiendrait à partir d'une réalisation particulière du désordre [18, 54, 55]. La moyenne d'une grandeur dépendant additivement de variables aléatoires a toutes les chances de se comparer au résultat de la mesure sur un échantillon (loi des grands nombres usuelle), tandis que c'est l'exponentielle de la moyenne du logarithme qui doit être considérée pour une grandeur dépendant de façon multiplicative des variables aléatoires (loi des grands nombres pour les produits de matrices aléatoires). Ainsi, la conductance typique s'écrit comme l'exponentielle de la moyenne sur le désordre du logarithme de la conductance. Le caractère auto-moyennant se traduit par le fait que la limite de  $g_L$  obtenue en faisant tendre  $L \rightarrow \infty$  est identique à celle obtenue en moyennant sur les configurations du désordre le logarithme de  $g_L$  et en prenant son exponentielle.

$\gamma(E)$  est simplement relié à la conductance typique via :

$$g_L = \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh(2L\gamma) - 1} . \quad (2.27)$$

En conséquence, la décroissance exponentielle de la conductance découle très simplement de la formule précédente, à condition que la longueur  $L$  soit plus grande que la longueur de localisation  $\ell = 1/\gamma$ .

Cette formulation du problème de localisation en terme de matrice de transfert aléatoire permet de montrer que presque *tous* les états propres d'un système désordonné unidimensionnel sont localisés, et ce quelque soit l'amplitude du désordre  $W \neq 0$  (2.8) [50]. La méthode de la matrice de transfert est particulièrement pratique pour l'étude numérique des propriétés de localisation des systèmes désordonnés, non seulement unidimensionnels, mais aussi de dimensions supérieures via l'étude de barreaux de longueur  $L$  et de section transverse  $L_\perp^{d-1}$  avec  $L_\perp \ll L$  [9, 10] (voir discussion de ce type d'étude dans la suite).

## C Théories de la localisation

Nous avons présenté quelques modèles simples de systèmes désordonnés et nous avons vu comment, éventuellement, caractériser le phénomène de localisation dans ces systèmes. Quels sont les mécanismes physiques conduisant à la localisation ? Nous présentons ici, quelques développements théoriques de la localisation d'Anderson. Deux approches, qui ne sont pas complètement inaccessibles, et qui ont donné des prédictions remarquables, sont la théorie auto-cohérente [44] et la théorie d'échelle [4, 6, 8]. La théorie auto-cohérente est fondée sur une approche perturbative du phénomène de localisation dans le régime de faible désordre. Les corrections au transport classique diffusif, dûes aux effets interférentiels, divergent dans la limite de fort désordre, i.e. dans le régime de localisation forte. La méthode auto-cohérente permet de dépasser cet obstacle. La théorie d'échelle se base sur des idées de renormalisation phénoménologique et notamment sur une hypothèse de loi d'échelle à un paramètre, validée par de nombreuses études numériques. Les deux théories prédisent l'existence d'une transition de phase métal-isolant en dimension strictement supérieure à deux, les états de systèmes uni- et bi-dimensionnels de système désordonnés invariant par renversement du temps étant localisés. Ces deux théories sont à la base de nos travaux présentés dans ce mémoire, c'est pourquoi nous les introduisons ici, dans ce chapitre, dans leur contexte original.

### C.1 Théorie auto-cohérente

*Ici, nous suivons la discussion par Vollhardt et al. [44].*

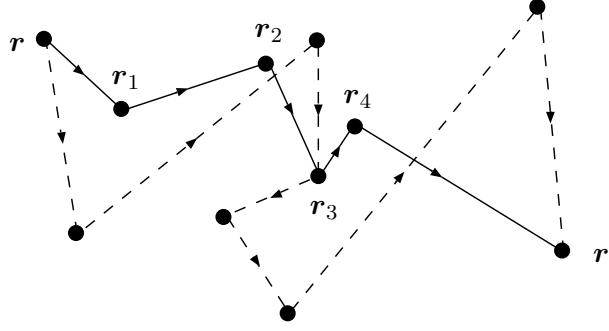
La théorie auto-cohérente [44] donne une description simple et assez précise du phénomène de localisation dans les systèmes désordonnés. En particulier, l'approche perturbative, sur laquelle cette théorie se fonde, permet une compréhension particulièrement intuitive des effets interférentiels sur la dynamique classique diffusive dans le régime de faible désordre (voir [45]).

#### C.1.1 Localisation faible et interférences quantiques

Considérons la dynamique d'électrons indépendants dans un système désordonné tel que modélisé par (2.3) : ces électrons sont diffusés par des impuretés ponctuelles, statiques, et distribuées spatialement aléatoirement. Pour décrire la physique d'un tel système, nous pouvons étudier sa constante de diffusion  $D$ . À vrai dire, la dynamique de particules dans un milieu (faiblement) désordonné est diffusive, caractérisée par une distribution de probabilité  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$  vérifiant une équation de diffusion :

$$(-i\omega - D\Delta_{\mathbf{r}'}) P(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) . \quad (2.28)$$

Dans un système 3D faiblement désordonné par des impuretés, la diffusion des particules à température nulle peut être caractérisée par un libre parcours moyen  $\ell_e$ , qui est la distance moyenne au bout de laquelle a lieu un événement de diffusion. Ceci définit le temps de collision  $\tau_e$  via  $\ell_e = v\tau_e$  où  $v$  est la vitesse caractéristique, par exemple la vitesse de Fermi dans le cas d'électrons. La constante de diffusion vaut dans ce cas :  $D_0 = v_F^2 \tau_e / 3$ .



**Fig. 2.4:** Deux trajectoires typiques d'un électron diffusant d'un point  $r$  à  $r'$ . Les événements de collision sont représentés par des points noirs.

Nous allons aborder le problème de la localisation du côté de ce régime métallique diffusif. Ce régime est observé dans la limite de faible désordre. Faible désordre signifie que le libre parcours moyen  $\ell_e$  est très grand devant la longueur d'onde  $k_F^{-1}$  de la particule,  $k_F \ell_e \gg 1$ , où  $k_F$  est le nombre d'onde de Fermi. Partant de ce régime métallique diffusif, nous voulons étudier les effets précurseurs de la localisation, i.e. les corrections à la constante de diffusion :

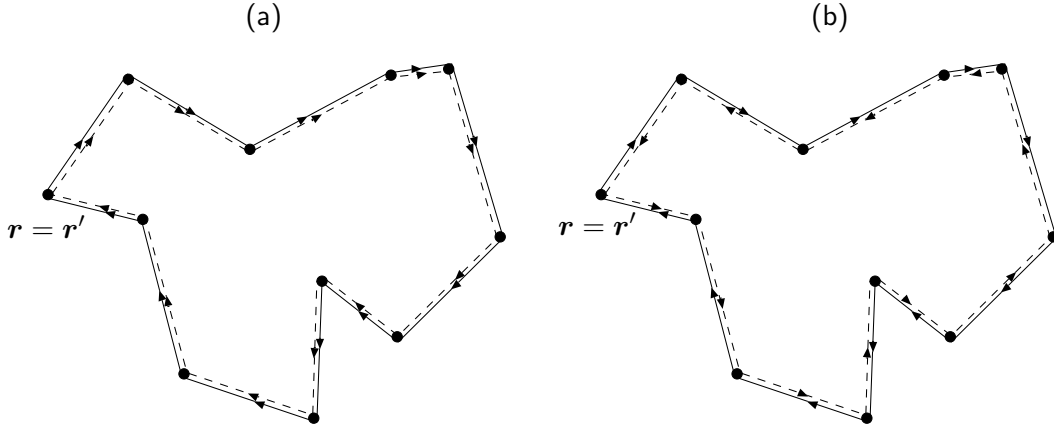
$$D = D_0 - \delta D . \quad (2.29)$$

Dans cette expression,  $D_0$  est la constante de diffusion classique et  $\delta D$  est une correction due à des effets d'interférences quantiques, comme nous allons le voir.

Pour comprendre la différence entre le comportement diffusif de particules classiques et celui de particules quantiques, considérons le chemin d'une particule diffusant d'un point  $r$  à un point  $r'$  (voir figure 2.4). Différentes trajectoires peuvent être empruntées, qui ont une certaine largeur (ce sont des tubes) donnée par la longueur d'onde de Fermi  $\lambda_F = h/v_{Fm}$ . Dans le cas classique ( $\hbar = 0$ ), ces "chemins de Feynman" sont arbitrairement étroits  $\lambda_F = 0$ . Dans le cas quantique, néanmoins, les tubes ont un diamètre fini  $\lambda_F = 2\pi k_F^{-1}$ . Supposons maintenant que  $\lambda_F$  est très petit,  $\lambda_F/\ell_e \ll 1$  et que la température est nulle (les événements de collision inélastique sont supposés très rares, et leurs effets négligeables ici). Puisque le transport de  $r$  vers  $r'$  peut se faire via différentes trajectoires, il faut associer à chaque chemin  $i$  une amplitude de probabilité  $\mathcal{A}_i$ . D'après la formulation de Feynman de la mécanique quantique, la probabilité totale d'aller du point  $r$  au point  $r'$  est donnée par le module carré de la somme des amplitudes :

$$\begin{aligned} P(r, r') &= \left| \sum_i \mathcal{A}_i \right|^2 \\ &= \sum_i |\mathcal{A}_i|^2 + \sum_{i \neq j} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j^* \end{aligned} \quad (2.30)$$

Le premier terme dans l'équation (2.30) consiste en des chemins appariés exactement identiques, et ainsi subsiste dans le cas classique où les chemins sont arbitrairement étroits. Le second terme décrit lui les effets d'interférence entre les différents chemins, et est ainsi un terme purement quantique. Dans la théorie du transport de Boltzmann, ces termes d'interférence sont négligés. Dans la plupart des cas, c'est, à vrai dire, justifié : puisque les trajectoires ont des longueurs différentes, les amplitudes  $\mathcal{A}_i$  ont des phases différentes. En



**Fig. 2.5:** Contributions (a) classique et (b) interférentielle à la probabilité de retour à l'origine. (a) Le chemin est parcouru dans le même sens par 1 (traits pleins) et 2 (traits pointillés). (b) Le chemin est parcouru en des sens opposés par 1 et 2.

moyenne, ceci conduit à des interférences destructives. Ainsi, les interférences quantiques représentées en figure 2.4 sont généralement peu importantes.

Néanmoins, lorsque le système est invariant par renversement du temps, il existe une configuration de chemins faisant exception : si les points  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  coïncident (figure 2.5). Alors, le point de départ et le point d'arrivée sont identiques, si bien que le chemin peut être parcouru de façon équivalente dans les deux sens opposés. La probabilité  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = \mathbf{r})$  d'aller de  $\mathbf{r}$  à  $\mathbf{r}'$  est ainsi la probabilité de retour à l'origine. Puisque les deux chemins 1 et 2 de la figure 2.5 sont symétriques l'un de l'autre par renversement du temps, les amplitudes  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  ont des phases cohérentes entre elles. Ceci conduit à une interférence constructive, et la contribution purement quantique à  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = \mathbf{r})$  devient très importante. Pour  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}$ , la probabilité de retour à l'origine classique est donnée par  $P_{\text{class}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = \mathbf{r}) = 2|\mathcal{A}|^2$  alors que celle quantique est  $P_{\text{quant}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = \mathbf{r}) = 2|\mathcal{A}|^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2^* = 4|\mathcal{A}|^2$ . Ainsi, l'on obtient :

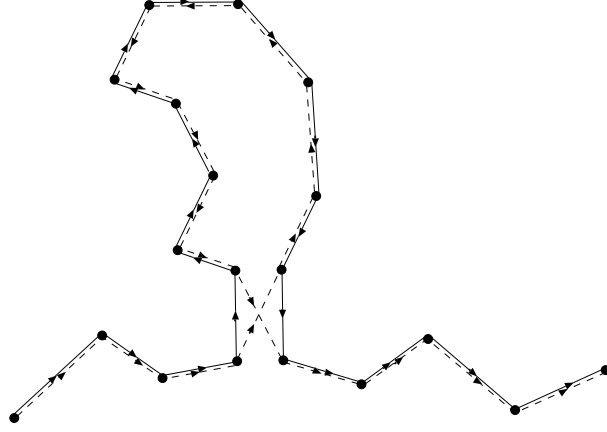
$$P_{\text{quant}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = \mathbf{r}) = 2P_{\text{class}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' = \mathbf{r}) . \quad (2.31)$$

La probabilité qu'une particule quantique retourne à son point de départ est ainsi deux fois celle correspondant à une particule classique. L'on peut de ce fait dire que la "diffusion quantique" est plus lente que celle classique, ceci étant dû à ce que la rétrodiffusion est plus efficace dans le cas quantique. En d'autres termes : des particules quantiques dans un système désordonné sont moins mobiles (à température nulle) que des particules classiques. Ceci conduit à un abaissement de la constante de diffusion  $D$ .

Il faut noter que le doublement de la probabilité de retour à l'origine est simplement une conséquence d'une interférence constructive entre deux chemins symétriques par renversement du temps. Dans le cas d'électrons, son origine est quantique seulement du fait que le caractère ondulatoire des électrons est un effet intrinsèquement quantique. En général, toute propagation d'onde dans un milieu désordonné a un résultat similaire (voir section D.3 de ce chapitre).

La correction  $\delta D$  due aux effets d'interférence est proportionnelle à la probabilité d'occurrence de chemins qui s'intersectent avec eux-mêmes pendant la diffusion (comme en figure 2.6). C'est la probabilité de trouver une particule dans un tube diffusant formant une





**Fig. 2.6:** Trajectoire d'un électron intersectant avec elle même. Au sein de la boucle formée, les chemins sont contre-propageants. Le croisement a un volume caractéristique  $\lambda_F^{d-1}\ell_e$ . Cette contribution restreint le transport diffusif, prémisse de la localisation d'Anderson : on parle de localisation faible.

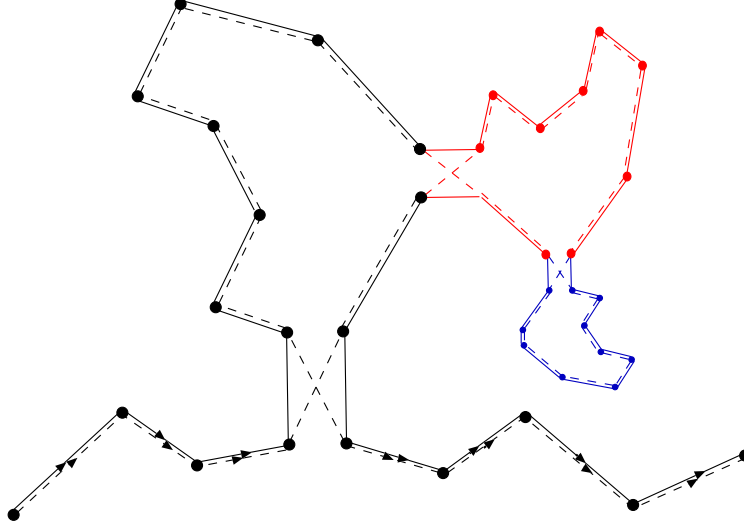
boucle. Considérons donc un tube de diamètre  $\lambda_F$ , i.e. de section transverse  $\lambda_F^{d-1}$ . Pendant l'intervalle  $dt$ , la particule se déplace sur une distance  $dl = v_F dt$ , si bien que l'élément de volume du tube correspondant est donné par  $dV = \lambda_F^{d-1} v_F dt$ . Également, le volume maximal accessible à la particule est celui exploré par la particule ayant une marche diffusive, soit  $1/P(\mathbf{r}, \mathbf{r}; t)$ . La probabilité pour une particule d'être dans un tube formant une boucle est donc donnée par l'intégrale sur le temps du rapport de ces deux volumes :  $\lambda_F^{d-1} v_F \int_{\tau_e}^t dt' P(\mathbf{r}, \mathbf{r}; t')$ .

C'est bien ainsi que l'on peut interpréter la formule suivante donnant les corrections de localisation faible  $D = D_0 - \delta D$  :

$$D = D_0 - \frac{D_0}{\pi \rho_0} \int \frac{d^d \mathbf{Q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{-i\omega + D_0 Q^2}, \quad (2.32)$$

où  $\rho_0$  est la densité d'états. En effet,  $1/\pi \rho_0 \propto \lambda_F^{d-1} v_F$  et l'intégrale sur  $\mathbf{Q}$  du pôle diffusif donne  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega)$ .

Lorsque  $\omega$  décroît vers 0, la constante de diffusion  $D(\omega)$  est de plus en plus faible. C'est bien ce à quoi l'on s'attend : à temps court (i.e. pour les grandes valeurs de  $\omega$ ), le comportement est diffusif avec coefficient de diffusion  $\approx D_0$ , mais au fur et à mesure que le temps passe, le mouvement diffusif est de plus en plus restreint, ceci étant caractérisé par un coefficient de diffusion de plus en plus faible. Il faut noter que le comportement de  $D(\omega)$  dépend fortement de la dimensionnalité  $d$  du système désordonné. La correction  $\delta D(\omega)$  au coefficient de diffusion classique  $D_0$  diverge dans la limite où  $\omega \rightarrow 0$ , en dimension  $d \leq 2$  [44]. En dimension un, ce n'est pas étonnant. En effet, dans la limite des temps longs, la dynamique est localisée (voir B.4) et ainsi,  $D(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ , ce qui veut dire que la correction est de l'ordre de  $D_0$ . On est sorti du régime perturbatif.



**Fig. 2.7:** Boucles imbriquées les unes dans les autres à la manière de poupées russes. La méthode auto-cohérente consiste à ne retenir que des contributions comme celle représentée, et non à sommer sur tous les diagrammes interférentiels. Il est délicat de justifier pourquoi l'on peut se restreindre à de tels diagrammes dans le régime localisé.

### C.1.2 Description du régime de localisation forte et de la transition d'Anderson

L'approche précédemment évoquée, qui ne retient que le premier ordre d'un développement en faible désordre (on n'a retenu qu'un seul type de contributions interférentielles qui domine à faible désordre), ne permet pas de décrire le régime de localisation forte. Dans le régime fortement désordonné où le libre parcours moyen est petit devant la longueur d'onde, il faudrait, en toute rigueur, tenir compte de *tous* les termes interférentiels.

Puisque la méthode perturbative échoue, il faut essayer une autre approche. Ici nous considérons l'approche auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle [44]. Précédemment, nous avons considéré que le transport au sein des boucles se faisaient avec la constante de diffusion  $D_0$  [ceci se reflète dans la somme sur le pôle de diffusion  $1/(-i\omega + D_0 Q^2)$ ]. Cette approximation n'est plus valable dès lors que le transport se fait à un  $D(\omega)$  très différent de  $D_0$ , soit au voisinage du régime de localisation forte : l'auto-cohérence revient à dire que le transport au sein des boucles devrait dépendre de  $D(\omega)$  et non de  $D_0$ . Dans un langage diagrammatique, ceci équivaut à habiller les boucles de boucles, i.e. à considérer des contributions où des boucles sont imbriquées les unes dans les autres (voir figure 2.7). Suivant ces idées, on aboutit à une équation auto-cohérente pour la constante de diffusion  $D(\omega)$  [44] :

$$D(\omega) = D_0 - \frac{D(\omega)}{\pi \rho_0} \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^d} \frac{1}{-i\omega + D(\omega) Q^2}. \quad (2.33)$$

On ne trouve pas de justification rigoureuse de cette équation dans la littérature. Néanmoins, cette équation rend compte de nombreux phénomènes prédits par d'autres théories (par exemple celle d'échelle, voir la sous-section suivante) et observés au moins numériquement (nous présentons une validation expérimentale de quelques unes de ces prédictions dans ce manuscrit). Nous donnons ici les prédictions de la théorie auto-cohérente qui nous

semblent les plus remarquables [44] :

- En dimension une et deux, les systèmes désordonnés symétriques par renversement du temps sont localisés.
- En dimension trois, une transition métal-isolant a lieu lorsque  $k_F \ell_e$ , qui caractérise l'amplitude du désordre (un faible désordre correspond à  $k_F \ell_e \gg 1$ ), atteint la valeur critique  $(k_F \ell_e)_c \approx 1$ , critère de Ioffe-Regel [56]. Cette transition de phase est continue (i.e. du second ordre). Au régime critique, la longueur de localisation  $\ell$  diverge en loi de puissance :

$$\ell \sim [k \ell_e - (k \ell_e)_c]^{-\nu} , \quad (2.34)$$

où  $\nu = 1$  est l'exposant critique associé à la longueur de localisation ; la constante de diffusion  $D(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} D(\omega)$  tend vers 0 suivant :

$$D(0) \sim [(k \ell_e)_c - k \ell_e]^s , \quad (2.35)$$

avec  $s = 1$  l'exposant critique associé à la constante de diffusion. On note que  $s = \nu$ , qui n'est autre que la loi de Wegner, reliant les exposants critiques entre eux, en dimension trois :  $s = (d - 2)\nu$  [6].

- Dans le cas d'un système de taille finie  $L$ , dans le régime localisé, la constante de diffusion  $D(0)$  multipliée par  $L^{d-2}$  n'est fonction que du rapport  $\ell/L$  de la longueur de localisation sur la taille du système. Ceci implique que le phénomène de localisation vérifie une *loi d'échelle à un paramètre*. Ce paramètre peut être pris directement comme le rapport  $\ell/L$  où encore comme la *conductance* adimensionnée en unité  $e^2/\hbar$ ,  $g = G/(e^2/\hbar) = \sigma L^{d-2}(e^2/\hbar)$  puisque la constante de diffusion et la conductivité sont reliées par la relation d'Einstein  $\sigma = \rho_0 e^2 D$ , où  $\rho_0$  est la densité d'états.
- Pour un système infini  $L \rightarrow \infty$ , une loi d'échelle à un paramètre similaire à la précédente est trouvée dans le domaine fréquentiel, où, en quelque sorte,  $L$  est remplacée par  $\omega^{-1/d}$  (voir section A du chapitre 7 de ce manuscrit).

## C.2 Théorie d'échelle

La théorie d'échelle [4,6,8], dont le développement est antérieur à la théorie auto-cohérente, a permis des prédictions tout à fait remarquables concernant le transport quantique dans les systèmes désordonnés, notamment la prédiction d'une transition de phase métal-isolant en dimension strictement supérieure à deux dans le cas de systèmes invariants par renversement du temps. L'hypothèse de loi d'échelle à un paramètre invoquée sous-tend l'idée que la transition d'Anderson peut être décrite comme une transition de phase du second ordre. Cette idée est justifiée de façon rigoureuse en faisant correspondre le problème de localisation avec un modèle sigma non-linéaire [57], modèle de comportement critique bien connu des théoriciens des champs.

Les études numériques de la transition d'Anderson ont montré la pertinence de ces idées de théorie d'échelle [9,10,12]. Le problème principal rencontré dans l'évaluation des comportements critiques à la transition d'Anderson est que plus on approche du point critique, plus on doit choisir la taille du système grande, de manière à obtenir des résultats ayant un sens. Plus précisément, le calcul des propriétés critiques requiert de procéder à la limite thermodynamique de façon contrôlée. Une possibilité est d'appliquer des lois d'échelles.

Puisque nous envisageons une description de la transition d'Anderson comme comportement critique, rappelons très brièvement quelques aspects de ces derniers.

### C.2.1 Invariance d'échelle

Le régime critique d'une transition de phase du second ordre est caractérisé par une propriété fondamentale : l'*invariance d'échelle*. Au seuil de la transition, il n'existe pas de quantité caractéristique telle qu'une longueur ou une énergie. C'est très différent du cas d'une transition de phase du premier ordre où le potentiel thermodynamique est discontinu, discontinuité définissant une chaleur latente.

L'invariance d'échelle implique des comportements critiques pour les quantités thermodynamiques en lois de puissance. Ceci peut se voir très simplement : supposons que la fonction  $f(x)$  est invariante d'échelle, i.e. se comporte de la même façon à toutes les échelles :

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \phi\left(\frac{x}{y}\right). \quad (2.36)$$

En dérivant par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\frac{f'(x)}{f(y)} = \frac{1}{y} \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \quad (2.37)$$

et ce pour tout  $x$  et tout  $y$ . Posons  $y = x$  :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \phi'(1) = \frac{\alpha}{x}, \quad (2.38)$$

où  $\alpha$  est une constante. L'équation différentielle précédente se résout simplement en loi de puissance :

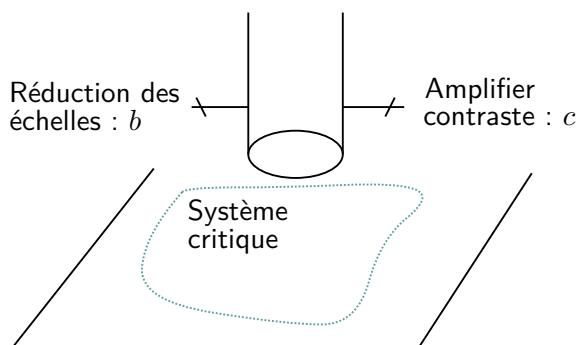
$$f(x) \propto x^\alpha. \quad (2.39)$$

### C.2.2 Renormalisation

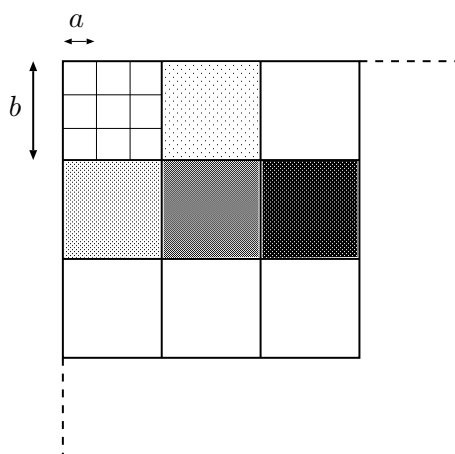
*La discussion suivante est inspirée du cours de théorie statistique des champs donné par J. B. Fournier aux étudiants du master "Physique théorique des systèmes complexes", à l'Université Pierre et Marie Curie, durant l'année scolaire 2005-2006.*

L'invariance d'échelle implique des lois d'échelle comme démontré par la théorie de renormalisation. De façon imagée, renormaliser consiste à regarder le système considéré avec un mégascope, qui agit de façon inverse à celle d'un microscope. Un mégascope a deux "boutons" : un bouton permettant de réduire les échelles  $b$ , et un bouton permettant d'amplifier le contraste  $c$  (voir figure 2.8). Son action  $\mathcal{T}_b$  consiste en trois points :

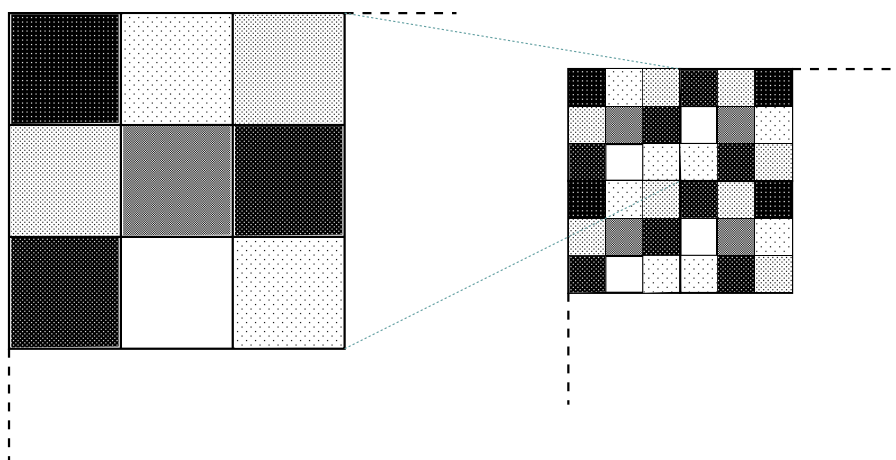
- *"Coarse graining"* : moyenne de l'image sur des zones de  $b$  pixels, donnant des "méga-pixels" (voir figure 2.9).
- *Amplification* : multiplier les valeurs des méga-pixels par un facteur  $b^c$  afin que ceux-ci soient autant contrastés que les pixels d'origine.
- *Réduction d'échelle* : réduire les échelles d'un facteur  $b$  de sorte que le méga-pixel soit de la taille  $a$  du pixel d'origine (voir figure 2.10).



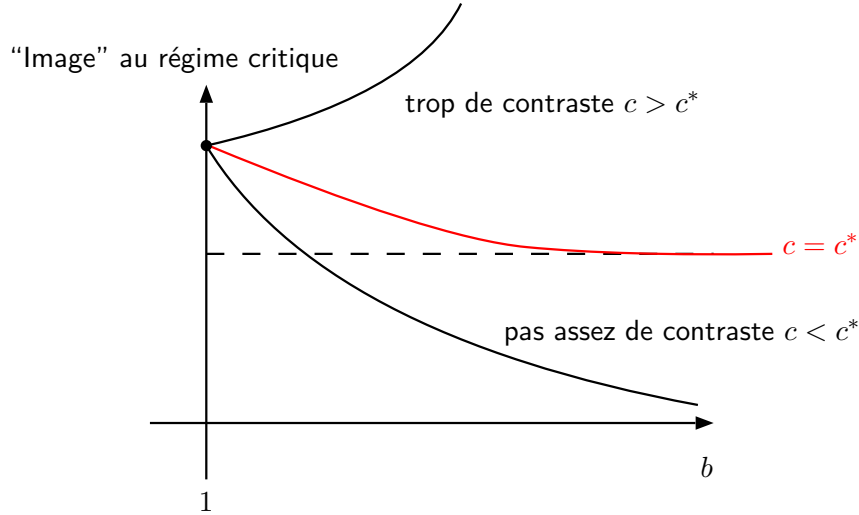
**Fig. 2.8:** Le mégascope est un outil de renormalisation, i.e. d'observation de systèmes critiques d'une manière inverse de celle d'un microscope : on s'éloigne du système au lieu de s'en rapprocher, et l'on considère ce système de loin.



**Fig. 2.9:** Procédure de "Coarse-graining" qui consiste à moyenner l'image sur  $b$  pixels de taille  $a$  donnant ainsi des "méga-pixels". Ici,  $b = 3$  et l'image représentée correspond par exemple à un modèle d'Ising où l'on a associé un pixel noir aux sites de spin  $+1$  et un pixel blanc aux sites  $-1$ .



**Fig. 2.10:** Procédure de réduction d'échelle de manière à ce que les méga-pixels soit de la taille  $a$  du pixel d'origine.



**Fig. 2.11:** Réglage du contraste  $c$  tel qu'au régime critique on observe avec le mégascope l'invariance d'échelle, i.e. l'invariance de l'image par rapport à  $b$ .

Une procédure de renormalisation consiste à itérer ces trois points une infinité de fois. Cette procédure a la structure d'un groupe :  $\mathcal{T}_b \mathcal{T}_{b'} = \mathcal{T}_{bb'}$ . Ainsi, augmenter le paramètre de réduction d'échelle  $b$  revient à faire plus d'itérations à  $b > 1$  fixé.

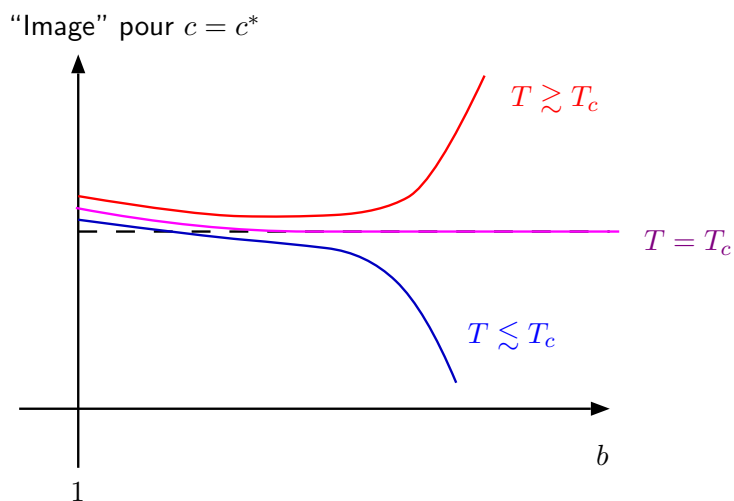
Comment utilise-t-on le mégascope ? Il faut d'abord régler le contraste  $c$  puis faire varier  $b \rightarrow \infty$ . On regarde ensuite "l'image" obtenue. Le contraste est réglé de telle sorte qu'au régime critique, on observe l'invariance d'échelle, i.e. l'invariance de l'image par rapport à  $b$  (voir figure 2.11). Lorsque le contraste est réglé,  $c = c^*$ , le mégascope permet de caractériser simplement le régime critique comme une variété asymptotique instable (voir figure 2.12).

Plus précisément, une "image" est associée à un Hamiltonien  $\mathcal{H}$ , i.e. à un ensemble de paramètres  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  caractérisant cet Hamiltonien :  $\mathcal{H}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ . Plaçons-nous dans l'espace  $\mathcal{E}$  de ces paramètres  $(\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\})$ . Un point de cet espace représente une "image" au mégascope. Lorsque l'on fait agir le groupe de renormalisation, on observe une trajectoire dans cet espace appelée flot de renormalisation (voir figure 2.13).

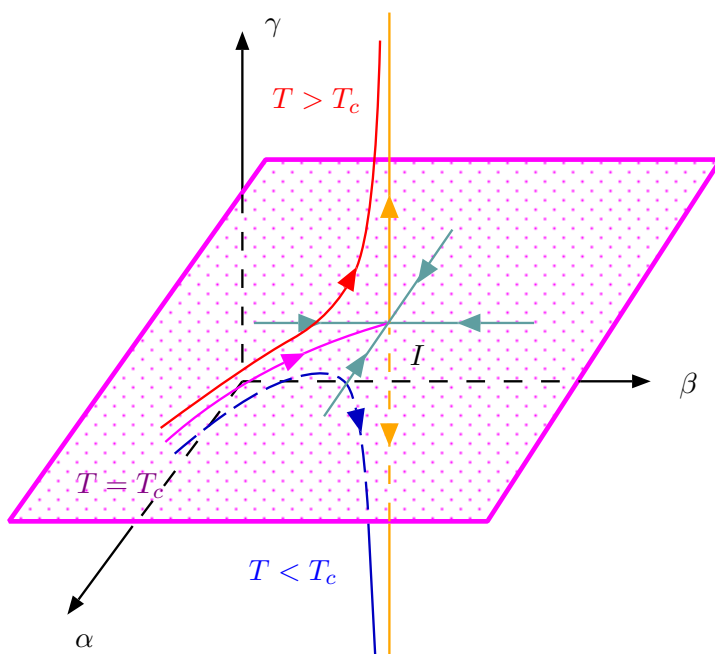
Les équations de ce flot sont des équations non-linéaires. Elles peuvent avoir un point fixe  $I$ , si le contraste est choisi de façon adéquate ; ce point fixe est généralement de nature hyperbolique, cas que l'on considère ici. Au voisinage du point fixe, on peut linéariser les équations du flot. On se place ensuite dans le repère diagonal, centré au point fixe. Partant d'une condition initiale  $(x_0, y_0, z_0, \dots)$  voisine du point fixe  $I = (0, 0, 0, \dots)$ , la trajectoire évolue suivant :

$$\begin{aligned} x &= x_0 b^{\mu_x} , \\ y &= y_0 b^{\mu_y} , \\ z &= z_0 b^{\mu_z} , \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.40}$$

où  $e^{\mu_{x,y,z}}$  sont les valeurs propres du Jacobien. Les variables pertinentes sont celles qui



**Fig. 2.12:** Représentation imagée du flot de renormalisation. La trajectoire critique est rapidement invariante d'échelle; elle ne dépend plus de  $b$ . Au dessus  $T > T_c$  (en rouge) et au dessous  $T < T_c$  (en bleu) du seuil, les trajectoires divergent de celle critique.



**Fig. 2.13:** Représentation du flot de renormalisation dans l'espace des paramètres  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ . Le cas d'un point fixe hyperbolique avec une seule direction instable est représenté. Ceci conduit à une théorie d'échelle à un paramètre.

s'éloignent du point fixe, i.e. celles associées à une valeur  $\mu$  positive. Comme elles s'éloignent, elles divergent. Les variables non-pertinentes sont celles qui tendent vers 0, i.e. celles associées à une valeur  $\mu$  négative. Dans le cas où une seule direction est instable (voir figure 2.13), on peut formuler une théorie d'échelle à un paramètre.

Les lois d'échelle se déduisent simplement du comportement du flot de renormalisation au voisinage du point fixe. Ainsi, considérons la longueur de corrélation  $\xi$ . Cette longueur  $\xi$  est définie à partir du paramètre d'ordre de la transition  $m = \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle$ , paramètre qui s'annule en loi de puissance à la transition, est non nul dans une phase et nul dans l'autre.  $\xi$  est la longueur caractéristique associée à la décroissance des corrélations du champ local associé au paramètre d'ordre  $\phi(\mathbf{r})$  :  $\langle \phi(\mathbf{0})\phi(\mathbf{r}) \rangle \sim \exp(-r/\xi)$ , avec  $r = |\mathbf{r}|$ .

Au voisinage du point fixe, la longueur de corrélation vaut  $\xi(x_0, y_0, z_0, \dots)$ . Vue au mégascope, la longueur de corrélation est plutôt  $\xi(x_0 b^{\mu_x}, y_0 b^{\mu_y}, \dots)$ . Cependant, le système physique vu au mégascope est identique à lui-même, si bien que l'on doit avoir :

$$\xi(x_0, y_0, \dots) = b \xi(x_0 b^{\mu_x}, y_0 b^{\mu_y}, \dots) , \quad (2.41)$$

où le préfacteur  $b$  du second membre est dû à la réduction des échelles. Supposons maintenant que seule la variable  $x$  soit pertinente :  $\mu_x > 0$  et tous les autres exposants  $\mu_{y,z,\dots}$  sont négatifs. Alors,  $y_0 b^{\mu_y} \rightarrow 0$  lorsque  $b \rightarrow \infty$ . En partant du voisinage du point fixe :  $x_0 \sim t = \frac{T-T_c}{T_c}$ . Appliquons la procédure de renormalisation jusqu'à ce que  $x_0 b^{\mu_x} = \tilde{x}$  où  $\tilde{x}$  est une constante. On a alors  $b \sim t^{-1/\mu_x}$ . Ainsi, dans la limite des grands  $b$ , la longueur de corrélation se comporte suivant :

$$\xi \sim t^{-1/\mu_x} \xi(\tilde{x}, 0, \dots) , \quad (2.42)$$

où  $\xi(\tilde{x}, 0, \dots)$  est une constante puisque les variables non-pertinentes sont nulles. Ceci implique une divergence de la longueur de corrélation  $\xi$  avec un exposant critique  $\nu = 1/\mu_x$  à la transition :

$$\xi \underset{T \rightarrow T_c}{\sim} |T - T_c|^{-\nu} . \quad (2.43)$$

Tous les systèmes physiques qui ont des points fixes font apparaître des lois d'échelle. L'existence d'un point fixe signifie l'invariance d'échelle : au seuil de la transition, le flot converge vers ce point fixe, autrement dit l'image ne dépend pas de  $b$ . Des systèmes différents peuvent avoir même point fixe, i.e. appartenir au même bassin d'attraction. C'est ce qui explique le phénomène d'universalité. De manière générale, les exposants critiques sont insensibles aux détails microscopiques mais dépendent seulement de la dimensionnalité et des symétries du système. Les différences dans ces détails microscopiques sont atténuées et rendues négligeables par la procédure de renormalisation. En revanche, la dimensionnalité et les symétries ont des conséquences macroscopiques qui survivent à la renormalisation.

### C.2.3 Finite-size scaling et transition d'Anderson

Interprétant la transition d'Anderson comme transition de phase du second ordre, on peut considérer la longueur de localisation  $\ell$  comme l'analogue de la longueur de corrélation d'un système thermodynamique, et le degré de désordre  $W$  [voir équation (2.9)] comme



l'équivalent de la température  $T$ . Au régime critique  $W \approx W_c$  et à la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ ,  $\ell$  est donc supposée diverger en loi de puissance (conséquence de l'invariance d'échelle) :

$$\boxed{\ell \sim |W - W_c|^{-\nu}} . \quad (2.44)$$

Considérant un système de taille finie  $L$  (ce qui est toujours le cas dans les études numériques), il est clair que la longueur de localisation  $\ell(L)$  ne peut pas diverger suivant cette loi. La taille du système agit en effet comme une limitation à  $\ell(L)$ . Ceci semble rendre caduque toute tentative d'étude numérique de la transition d'Anderson. Il n'en est rien, comme on va le voir.

Étudier l'évolution des propriétés critiques d'un système en fonction de sa taille finie  $L$  consiste à effectuer une renormalisation phénoménologique du système [58]. La renormalisation d'un système de taille infinie au voisinage du point critique implique [voir Eq. (2.41)] :

$$\ell(W) = b \ell(W') , \quad (2.45)$$

où  $\ell$  à gauche et à droite sont les mêmes fonctions,  $b$  est le facteur de réduction d'échelle, et  $W$  et  $W'$  sont reliés par :

$$(W' - W_c) = (W - W_c) b^{1/\nu} . \quad (2.46)$$

Ceci équivaut à une divergence de la longueur de localisation en loi de puissance (2.44) avec exposant critique associé  $\nu$ .

Suivant ces idées, deux systèmes de tailles différentes  $L$  et  $L'$  au régime critique devraient vérifier :

$$\frac{\ell_L(W)}{L} = \frac{\ell_{L'}(W')}{L'} , \quad (2.47)$$

avec  $b = L/L'$  le facteur de réduction d'échelle ; ceci impliquant que la longueur de localisation  $\ell(L)$  vérifie la loi d'échelle :

$$\ell(L) = L F \left[ (W - W_c) L^{1/\nu} \right] . \quad (2.48)$$

Il faut noter que la relation précédente n'est certainement valable qu'au voisinage du point critique  $(W - W_c) L^{1/\nu} \ll 1$ , et dans la limite  $L \rightarrow \infty$  où les variables d'échelle non pertinentes sont négligeables (cf. discussion de la renormalisation en C.2.2). Lorsque  $L$  n'est pas suffisamment grande, il faut tenir compte, entre autres, des variables non pertinentes comme corrections à la loi d'échelle, en écrivant [voir Eq. (2.41)] :

$$\ell(L) = L F \left[ (W - W_c) L^{1/\nu}, y_0 L^{\mu_y} \right] , \quad (2.49)$$

avec  $\mu_y < 0$  [12].

Suivant cette analyse, on peut procéder à une étude numérique des propriétés de transport dans les systèmes désordonnés en dimension  $d$ . La loi d'échelle (2.48) est vérifiée s'il existe un paramètre d'échelle  $\xi(W)$  tel que :

$$\Lambda = \frac{\ell(L)}{L} = \mathcal{F} \left( \frac{\xi(W)}{L} \right) , \quad (2.50)$$

et vérifiant :

$$\xi(W) \underset{W \rightarrow W_c}{\sim} |W - W_c|^{-\nu} . \quad (2.51)$$

La fonction  $\mathcal{F}$  est dans ce cas simplement reliée à la fonction d'échelle  $F$  et le paramètre d'échelle  $\xi(W)$  varie, dans le régime localisé, comme la longueur de localisation du système de taille infinie  $\ell$ .

Ce type d'étude entrepris en dimensions deux et trois [9, 10] montre que :

- Un système désordonné en dimension deux invariant par renversement du temps est toujours localisé, mais avec une longueur de localisation exponentiellement grande à mesure que le degré de désordre  $W$  diminue.
- En dimension trois, une transition de phase métal-isolant est observée. L'exposant critique  $\nu$  déterminé numériquement est différent de ce qui est prévu par la théorie auto-cohérente ( $\nu = 1$ ) :  $\nu = 1.57 \pm 0.02$  [12]. Cette valeur est universelle, i.e. ne dépend pas des détails microscopiques du modèle (distribution de probabilité du désordre, anisotropie) mais seulement de la classe de symétrie [38–40].

#### C.2.4 Lois d'échelle à un paramètre pour le phénomène de localisation

Il faut noter qu'en dimension deux, *de façon surprenante*, la quantité  $\Lambda = \ell(L)/L$  vérifie une loi d'échelle à un paramètre (2.50). Or, dans cette dimension, il n'y a pas de transition de phase observée, si bien que l'on ne peut appliquer une analyse des propriétés de localisation en comportement critique. Comment, donc, justifier la loi d'échelle à un paramètre observée dans ce cas ?

Historiquement, l'existence, en dimension quelconque, de lois d'échelle à un paramètre, a été prédite en raisonnant sur la conductance adimensionnée  $g = Gh/e^2$  [4, 6–8]. Nous suivons ici l'analyse de Landauer [7] du problème de localisation en termes de matrice de transfert (voir section B.4 du présent chapitre). Le transport de charge au travers d'un système désordonné uni-dimensionnel peut être vu comme un problème de mécanique quantique de transmission. Considérons un tel système, i.e. un fil désordonné, connecté, en ses deux extrémités, à deux conducteurs parfaits. La tension est générée par la différence des densités de charges à droite et à gauche du fil désordonné. Le courant est donné par le nombre total de particules chargées transmises au travers du fil désordonné à la vitesse de Fermi. La résistance adimensionnée est alors trouvée vérifier :

$$R = \frac{1 - \mathcal{T}}{\mathcal{T}} , \quad (2.52)$$

où  $\mathcal{T}$  est le coefficient de transmission.

Soit deux échantillons de ce système désordonné de taille  $L$  et  $L'$  mis en série. La matrice de transfert du “méga-bloc” ainsi formé est égale au produit des matrices de transfert des blocs de taille  $L$  et  $L'$ . Ceci implique que le coefficient de transmission  $\mathcal{T}$  vérifie un loi de composition multiplicative. Lorsqu'on applique un facteur de réduction d'échelle  $b$ ,  $L \rightarrow bL$ ,  $\mathcal{T}$  évolue suivant [18] :

$$\mathcal{T}(bL) = [\mathcal{T}(L)]^b . \quad (2.53)$$

Ceci se traduit pour la résistance  $R$  par la loi d'échelle :

$$R(bL) = [1 + R(L)]^b - 1. \quad (2.54)$$

Dans le cas où la résistivité de chaque bloc de taille  $L$  est faible,  $R(L) \ll 1$ , la relation précédente redonne l'additivité de résistances classiques mises en série :  $R(bL) = bR(L)$ . Néanmoins, dans le cas d'une grande résistivité de chaque bloc, on trouve une loi multiplicative :  $R(bL) = R(L)^b$  qui conduit à la localisation forte, exponentielle. L'équation (2.54) démontre l'existence d'une loi d'échelle à un paramètre  $R$  (ou encore  $g = R^{-1}$ ) en dimension un.

La loi d'échelle (2.54) peut d'ailleurs se mettre sous la forme d'une fonction  $\beta$  [8] qui permet d'exprimer, sous forme différentielle, l'évolution locale de la variable d'échelle  $R$  lorsque  $L$  varie :

$$\frac{d \ln R}{d \ln L} = \beta(\ln R). \quad (2.55)$$

Nous nous restreignons à des facteurs de réduction d'échelle très petits  $b = 1 + \delta L/L$ ,  $\delta L/L \ll 1$ , et nous développons au premier ordre en  $\delta L/L \ll 1$  la loi d'échelle (2.54) :

$$\begin{aligned} R(L + \delta L) &= [1 + R(L)]^{1 + \delta L/L} - 1 \\ &= [1 + R(L)] \exp \left\{ \frac{\delta L}{L} \ln[1 + R(L)] \right\} - 1 \\ &\approx [1 + R(L)] \left\{ 1 + \frac{\delta L}{L} \ln[1 + R(L)] \right\} - 1 \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\approx R(L) + \frac{\delta L}{L} [1 + R(L)] \ln[1 + R(L)]. \quad (2.57)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \ln R(L + \delta L) &\approx \ln R(L) + \ln \left\{ 1 + \frac{\delta L}{L} \frac{1 + R(L)}{R(L)} \ln[1 + R(L)] \right\} \\ &\approx \ln(R) + \frac{\delta L}{L} \frac{1 + R(L)}{R(L)} \ln[1 + R(L)]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Conclusion :

$$\frac{d \ln R}{d \ln L} = \frac{1 + R}{R} \ln[1 + R]. \quad (2.59)$$

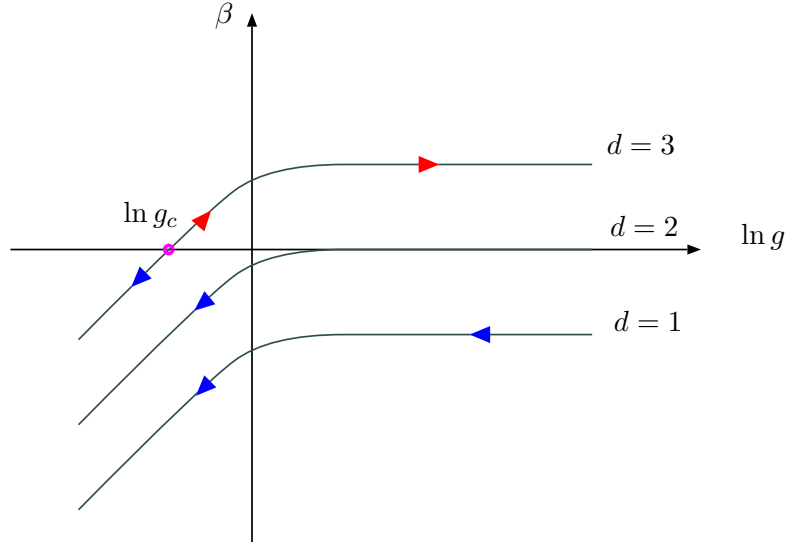
Ceci peut se reformuler simplement pour la conductance adimensionnée  $g = R^{-1}$  sous la forme :

$$\boxed{\beta(\ln g) = \frac{d \ln g}{d \ln L} = -(1 + g) \ln(1 + g^{-1})}. \quad (2.60)$$

La fonction  $\beta(\ln g)$  est toujours négative en dimension un et dans la limite des grandes conductances,  $g \gg 1$ ,  $\beta(\ln g) \approx -1 - 1/2g$  et dans la limite opposée  $g \ll 1$ ,  $\beta(\ln g) \approx \ln g$ .

Suivant [8], nous supposons l'existence d'une fonction  $\beta_d(\ln g)$  en dimension  $d$  quelconque. Que ceci ait un sens peut être vu en considérant la fonction  $\beta_d$  dans les cas limites  $g \gg 1$  et  $g \ll 1$ . Dans un bon métal où la conductivité est une constante, la loi d'Ohm  $G = \sigma L^{d-2}$  [voir Eq. (2.17) avec  $L_\perp = L$ ] conduit à :

$$\beta_d(\ln g) \underset{g \rightarrow \infty}{\sim} d - 2, \quad (2.61)$$



**Fig. 2.14:** Comportement qualitatif de la fonction  $\beta$  pour le problème de localisation dans les systèmes désordonnés. En dimension  $d = 3$  a lieu une transition métal-isolant à un seuil critique  $g_c$  qui forme un point fixe instable du flot déterminé par la fonction  $\beta$ .

alors que dans la phase exponentiellement localisée,  $G \sim e^{-2L/\ell}$ , on obtient :

$$\beta_d(\ln g) \underset{g \rightarrow 0}{\sim} \ln g. \quad (2.62)$$

Supposons que  $\beta_d(\ln g)$  soit une fonction régulière. Alors on peut tenter d'interpoler entre les deux branches asymptotiques. Ce faisant, on aboutit aux conclusions suivantes (voir figure 2.14) :

- En dimension un, les états sont toujours localisés. La fonction  $\beta_1$  est en effet toujours négative, ce qui implique que lorsque la taille  $L$  augmente, la conductance adimensionnée  $g$  tend vers 0.
- En dimension deux, la situation dépend du signe des corrections de localisation faible pour des grandes valeurs de  $g$  (voir section C.1.1 du présent chapitre). Lorsque le système est invariant par renversement du temps, les effets de localisation faible tendent à restreindre le transport, ainsi, la fonction  $\beta_2$  est toujours négative, et l'état est localisé à la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ .
- En dimension trois, une transition métal-isolant a lieu du fait que la fonction  $\beta_3$  change de signe en une valeur critique  $g_c$  de la conductance. Pour  $g < g_c$ ,  $\beta_3 < 0$  et le système tend vers un état localisé lorsque  $L$  augmente, alors que pour  $g > g_c$ ,  $\beta_3 > 0$  et la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$  est métallique.

Ces prédictions, fondées sur l'hypothèse de loi d'échelle à un paramètre [8], ont été vérifiées numériquement [59]. Il faut noter que l'approche en fonction  $\beta(\ln g)$  des propriétés d'échelle de la localisation est équivalente à celle dite de "Finite-Size Scaling", résumée par l'équation (2.50). Ceci se comprend aisément en considérant que la conductance  $g = \mathcal{T}/(1 - \mathcal{T})$  est reliée à  $\Lambda = \ell(L)/L$  via  $\mathcal{T} = \exp[-2L/\ell(L)]$  [59].

La théorie précédente pose néanmoins problème car elle considère la conductance qui n'est pas une quantité auto-moyennante (voir section B du présent chapitre). La conductance d'un système mésoscopique dépend fortement des propriétés individuelles du système (en

particulier de la configuration du désordre). Il s'ensuit qu'un ensemble de systèmes différents présente des fluctuations de conductance qui peuvent être si fortes que l'on ne peut pas caractériser la distribution correspondante par sa valeur moyenne [18]. Cette incompatibilité apparente de la théorie d'échelle et des fluctuations a été résolue dans [60] où la distribution de conductance est montrée vérifier une loi d'échelle à un paramètre.

## D Études expérimentales de la transition d'Anderson

Nous avons vu quelles prédictions théoriques ont été faites sur les modèles simples (2.3) et (2.5). Qu'en est-il des observations expérimentales ? Quelles sont les déviations majeures des systèmes expérimentaux aux modèles ? Ces déviations empêchent-elles d'observer les phénomènes prédits ? En outre, étant donné que les théories de la localisation sont incomplètes (la valeur de l'exposant critique  $\nu = 1$  donnée par la théorie auto-cohérente n'est pas compatible avec les résultats de simulations numériques), les expériences permettent-elles de poser de nouveaux jalons, d'observer des phénomènes pas encore parfaitement compris ?

Ici, nous insistons sur la transition d'Anderson, qui est notre sujet d'étude. Nous passons en revue les études expérimentales de la transition d'Anderson dans les systèmes désordonnés électroniques et d'ondes classiques dans les milieux désordonnés (nous avons en effet vu que le phénomène de localisation peut être observé avec n'importe quelle onde, en théorie du moins) en dimension trois. La discussion suivante n'entend pas être exhaustive ni respecter l'ordre historique des observations, mais seulement souligner les limites physiques fondamentales de ces expériences, afin de motiver notre étude de la transition d'Anderson avec des atomes froids.

Pour les systèmes électroniques, la transition métal-isolant a été observée de façon non-ambigüe. Cependant, l'interprétation théorique du comportement critique observé est compliqué par la présence de l'interaction Coulombienne qui affecte de façon non-triviale les propriétés de localisation [15–17]. Si bien que l'on ne peut pas faire correspondre les exposants critiques mesurés expérimentalement avec ceux issus de simulations numériques du problème sans interactions. Sur ce point, la localisation de la lumière a l'avantage de ce que les interactions photon-photon sont négligeables. Néanmoins, il ressort que la réalisation d'un désordre suffisamment grand et décorrélé pour atteindre la transition d'Anderson et la localisation forte de la lumière en dimension trois est particulièrement difficile. L'obstacle principal à l'observation de la localisation d'Anderson dans ce type de système est posé par le phénomène d'absorption. Dans ces deux approches, seules des propriétés de transport globales telles que la conductivité ou la transmission peuvent être mesurées. En particulier, l'accès direct à la probabilité de diffusion quantique n'est pas possible.

### D.1 Longueur de cohérence de phase

Considérant des systèmes expérimentaux réels, le phénomène de décohérence ne peut pas toujours être négligé et introduit une nouvelle longueur caractéristique dans le problème considéré, la longueur de cohérence de phase  $L_\phi$ , qui est la distance moyenne qu'une particule quantique telle qu'un électron parcourt avant que ses phases initiales et finales ne deviennent incohérentes. La décohérence est due à un certain nombre d'événements de collision inélastique qui imposent à la phase des sauts aléatoires. La distance moyenne entre deux événements de collision inélastique peut être identifiée à  $L_\phi$ . La longueur de cohérence de phase dépend entre autres de la température.

La longueur de cohérence de phase joue un rôle fondamental dans l'observation expérimentale des effets interférentiels sur le transport quantique et notamment sur les effets de

localisation. Pour des systèmes de taille  $L$  inférieure à la longueur de cohérence de phase  $L_\phi$ , le système peut être considéré idéal au sens où les effets de décohérence sont négligeables et seule la taille du système est le facteur limitant, qui peut être responsable d'effets de taille finie. En revanche, lorsque  $L_\phi < L$ , c'est la longueur de cohérence de phase qui limite les effets interférentiels (les lois d'échelle s'écrivent en fonction de  $L_\phi$  et non plus de  $L$  [14]). L'ordre de grandeur de la longueur de cohérence de phase est de quelques microns pour des métaux et semi-conducteurs à des températures inférieures à celle de l'Hélium liquide. C'est la raison pour laquelle il a fallu des avancées technologiques importantes, dans les années 80, pour permettre l'étude systématique des conducteurs mésoscopiques.

## D.2 Observation de la transition métal-isolant dans les solides désordonnés

Certains effets de localisation faible ont pu être observés dans des films fins de métaux faiblement désordonnés [14]. À faible température, le comportement observé de la résistance électrique ne peut être compris qu'en prenant en compte les effets quantiques en présence de désordre déjà mentionnés (voir section C.1.1 de ce chapitre). Des “anomalies” à la théorie de transport de Boltzmann sont trouvées dans la dépendance en température (loi d'échelle en fonction de  $L_\phi$ ) et en champ magnétique (le couplage spin-orbite peut annuler les effets de localisation) de la résistance.

L'expérience la plus claire montrant l'existence d'une transition métal-isolant est l'effet Hall quantique découvert par von Klitzing [61]. L'effet Hall quantique, qui se produit dans des gaz d'électrons bi-dimensionnels en présence de forts champs magnétiques perpendiculaires, se caractérise par une fonction en marche d'escalier pour le comportement de la résistance de Hall (résistance transverse)  $\rho_{xy}$  en fonction de ce qu'on appelle le facteur de remplissage (une quantité sans dimension proportionnelle à la densité électronique et à l'inverse du champ magnétique) et par une annulation de la résistance dissipative (résistance longitudinale)  $\rho_{xx}$  dans les régimes de plateaux de Hall. Les pics de résistance dissipative fonctions du facteur de remplissage ont une interprétation claire en termes de transition de phase métal-isolant. En particulier, les lois d'échelle en taille d'échantillon prédites par la théorie d'échelle de l'effet Hall quantique entier ont pu être observées expérimentalement en faisant varier la température, i.e. la longueur de cohérence de phase  $L_\phi(T)$  [62, 63].

Cependant, pour atteindre (en l'absence de fort champ magnétique perpendiculaire) le régime de localisation forte où la longueur de localisation est inférieure à la taille du système  $\ell < L < L_\phi$ , on doit utiliser des systèmes fortement désordonnés. Le problème majeur rendant difficile la comparaison des prédictions théoriques avec les expériences vient du fait que l'interaction de Coulomb entre électrons devient essentielle, cependant la plupart des modèles théoriques sont basés sur une description en termes d'électrons indépendants (voir [17] pour une description théorique des effets des interactions sur le phénomène de localisation). Le fait que les interactions mutuelles entre électrons ne soient pas négligeables en présence de désordre, contrairement à ce à quoi l'on s'attend de par la théorie des liquides de Fermi, peut se comprendre via la nature diffusive et non pas ballistique des électrons soumis à un potentiel faiblement désordonné. Cette dynamique

diffusive est beaucoup plus “lente” que celle balistique d’électrons libres (ou encore soumis à un potentiel périodique) et ceci accroît d’autant les effets des interactions entre électrons.

La transition métal-isolant a été étudiée de façon extensive dans les semi-conducteurs dopés tels que  $Si : P$ ,  $Si : B$ ,  $Si : As$ ,  $Ge : Sb$ . Dans la plupart de ces travaux, des échantillons avec un degré substantiel de compensation [i.e. des accepteurs en plus des donneurs, e.g.  $Si : (P, B)$ ] ont été utilisés, ce qui permet de varier le degré de désordre et la concentration en électrons de façons indépendantes. Dans ces échantillons, la valeur de l’exposant critique  $s$  pour la conductivité (i.e. pour la constante de diffusion  $D$ ) mesurée est au voisinage de  $s \approx 1$  (voir par exemple [64]) avec une dispersion et une incertitude de l’ordre de 10%. Un résultat similaire a été obtenu pour un matériau amorphe  $Nb_xSi_{1-x}$ . On rappelle qu’en dimension trois, les exposants critiques  $s$  et  $\nu$  sont reliés par la loi de Wegner  $s = \nu(d - 2)$ . Ainsi, la mesure d’un seul des deux exposants suffit pour caractériser la transition.

D’un autre côté, l’étude antérieure aux précédentes de la transition dans  $Si : P$  non compensé a donné pour résultat  $s \approx 0.5$  (voir par exemple [65]). Suivant [66] cette différence est liée au fait que le régime critique pour  $Si : P$  non compensé est très étroit ; si l’on se restreint à ce domaine, alors l’exposant  $s$  trouvé est plutôt de l’ordre de  $s \approx 1.3$ . Une autre étude plus récente [67] a confirmé cette analyse et donne  $s = 1.0 \pm 0.1$  en accord avec les valeurs mesurées dans les échantillons compensés.

Les valeurs expérimentales  $s \approx 1$  trouvées dans la plupart de ces travaux diffèrent notablement de la valeur mesurée à partir de simulations numériques pour des systèmes non-interagissants  $s = \nu \approx 1.6$  [12] : l’interaction de Coulomb affecte les exposants critiques [16].

### D.3 Observation de la transition d’Anderson avec des ondes classiques

Depuis l’observation du cône de rétro-diffusion en intensité [68–70], signature de la localisation faible (même si le phénomène de localisation faible s’avère plus riche que la simple rétro-diffusion cohérente [71]), des efforts considérables ont été faits afin d’observer la localisation forte de la lumière, et plus généralement d’ondes classiques. La motivation initiale était que la lumière devrait être un très bon candidat pour l’observation de ce phénomène, les photons n’interagissant pas entre eux. Néanmoins, le régime de localisation forte s’est avéré très difficile à atteindre d’un point de vue technique du fait que pour vérifier le critère de Ioffe-Regel  $k\ell_e \lesssim 1$ , des particules très diffusantes doivent être utilisées (ayant grande section efficace), et le libre parcours moyen doit être faible. Or ces conditions sont difficiles à réaliser expérimentalement avec des ondes classiques : on ne peut pas continuellement augmenter la fraction volumique des diffuseurs et la section efficace est limitée. En outre, l’étude de la localisation est grandement compliquée par le fait que de nombreuses caractérisations de la localisation d’ondes classiques sont ambiguës. En particulier, la mesure de l’intensité totale transmise ne permet pas de distinguer entre les effets de la localisation forte de ceux de l’absorption, ceux-ci conduisant chacun à une décroissance exponentielle du nombre de photons transmis. Ainsi, l’observation de la localisation de la lumière rapportée dans [19], qui présente toutes les caractéristiques attendues pour le phénomène de localisation, comme le fait que la transmission de la lumière au voisinage de la transi-



tion d'Anderson devrait varier comme l'inverse du carré de l'épaisseur de l'échantillon 3D désordonné, a été contestée sur la base de ce que ces phénomènes peuvent être observés avec de la lumière diffusante avec absorption non nulle [72].

Un moyen de dépasser cet obstacle est de mesurer la dépendance temporelle de l'intensité transmise, la source utilisée étant une impulsion temporelle courte de lumière. La signature temporelle des effets de la localisation est en effet différente de celle d'une évolution classique diffusive avec absorption : elle ne décroît pas exponentiellement aux temps longs. Les boucles interférentielles prolifèrent aux temps longs et ceci restreint le transport, i.e. ralentit la lumière, plus que de normal. Se basant sur une telle caractérisation de la localisation, la transition d'Anderson a pu être observée [20]. Cependant, l'exposant critique de la longueur de localisation  $\nu$  mesuré,  $\nu = 0.5 \pm 0.1$  [73], n'est pas compatible avec la mesure numérique à partir du modèle d'Anderson,  $\nu = 1.57 \pm 0.2$  [12]. En outre, les propriétés spatiales des effets de localisation n'ont pu être observées avec ce dispositif.

Un concept extrêmement intéressant dans ce contexte est celui de localisation transverse [74]. La propagation de la lumière dans un milieu présentant un désordre transverse à la direction de propagation présente une localisation forte 2D : le faisceau s'étend jusqu'à ce que la longueur de localisation soit atteinte, comme récemment observé expérimentalement [75]. Ceci permet la caractérisation expérimentale des propriétés spatiales de la localisation. La pertinence de cette approche a été démontrée de façon remarquable très récemment [24, 76] : la localisation transverse d'ondes classiques dans un milieu désordonné 3D a été observée (le désordre est présent même dans la direction "longitudinale") qui permet de s'affranchir du problème de l'absorption, et d'étudier la dynamique et les propriétés spatiales des effets de localisation. Un résultat des plus marquants est l'observation de la multifractalité au seuil de la transition d'Anderson [76]. Cependant, le comportement critique n'a pu être (encore) caractérisé : une mesure des exposants critiques de la transition n'a pas été donnée utilisant cette méthode.

---

# Le Kicked Rotor périodique et sa relation avec le modèle d'Anderson 1D

---

---

## Sommaire

---

LES observations expérimentales de la transition d'Anderson prédite pour le modèle d'Anderson sont à tout le moins imparfaites, au sens où elles diffèrent notablement des résultats des simulations numériques du comportement critique [12]. La raison réside sans aucun doute dans les déviations des systèmes expérimentaux considérés au modèle théorique d'Anderson, soit de par les interactions entre électrons dans le cas de solides désordonnés, soit du fait de l'absorption dans le cas des ondes classiques dans les milieux désordonnés. En outre, les dispositifs présentés ne permettent pas vraiment d'observer les effets de localisation in-situ, par exemple la localisation exponentielle de la fonction d'onde.

Les atomes froids apparaissent comme un très bon candidat pour l'observation des effets de localisation d'Anderson. De fait, l'ingénierie quantique développée ces dernières années permet de contrôler les interactions, la décohérence et de soumettre les particules à des potentiels lumineux qui se sont avérés de très bonnes réalisations de modèles théoriques de la matière condensée (modèle de Bose-Hubbard par exemple [77]). Récemment, la réalisation d'un potentiel lumineux désordonné à partir de figures de tavelure ("speckle") a permis l'observation directe de la localisation exponentielle d'Anderson 1D avec un condensat de Bose-Einstein dilué [28]. Cependant, le potentiel réalisé est un potentiel corrélé rendant l'observation de ces phénomènes délicate. Il n'a pas été à ce jour produit de potentiel lumineux désordonné 3D permettant l'observation de la transition d'Anderson.

Nous présentons ici le système qui a permis la première observation expérimentale de la localisation d'Anderson avec des ondes de matière atomique [34], système qui n'est pas à strictement parler désordonné, mais dont la dynamique classique est chaotique. Ce système, le Kicked Rotor périodique, est un paradigme du chaos quantique qui est

parfaitement équivalent à un modèle d'Anderson 1D : le chaos y réalise un désordre pseudo-aléatoire ne présentant pas de corrélations. Ce modèle est à la base de notre étude car il est réalisable simplement avec des atomes froids [34], dont une variante quasi-périodique devrait permettre l'observation de la transition d'Anderson [78].

## A Le Kicked Rotor périodique atomique

Considérons un atome à deux niveaux soumis à une onde stationnaire formée par deux lasers contre-propageants de fréquence  $\omega_L = k_L c$ , la valeur de cette fréquence étant décalée de celle de la transition atomique  $\omega_0$  de la quantité  $\Delta_L = \omega_L - \omega_0$ . Il est bien connu que l'atome et le rayonnement peuvent interagir de deux façons différentes [79] :

- Premièrement, l'atome, absorbant un photon du laser, peut le ré-émettre de façon spontanée dans une direction aléatoire. Ce processus est dissipatif, il donne lieu à une force de pression de radiation, dont le taux est  $\Gamma\Omega^2/4\Delta_L^2$ , où  $\Gamma$  est la largeur naturelle et  $\Omega$  la fréquence de Rabi (on suppose que  $|\Delta_L| \gg \Gamma, \Omega$ ).
- Deuxièmement, l'atome peut absorber un photon du laser et le ré-émettre dans le même (ou un autre) mode du laser par émission stimulée. Ce processus conservatif est associé à un potentiel agissant sur le mouvement du centre de masse de l'atome, appelé potentiel optique ou dipolaire. Pour une onde stationnaire, ce potentiel est :

$$\hat{V}_{\text{opt}} = \frac{\hbar\Omega^2}{8\Delta_L} \cos(2k_L \hat{X}) , \quad (3.1)$$

où  $X$  est la position du centre de masse de l'atome le long de l'onde stationnaire. Il est clair que cette interaction est uni-dimensionnelle, puisque les échanges d'impulsion entre l'atome et le rayonnement se font toujours le long de l'onde stationnaire : l'atome absorbe un photon de l'un des faisceaux pour le ré-émettre dans le faisceau contre-propageant, ceci conduisant à un échange d'impulsion quantifié par  $2\hbar k_L$  le long de l'axe des  $X$ .

Un point important à noter est que l'amplitude du potentiel optique est de l'ordre de  $\Omega^2/\Delta_L$  alors que le taux d'émission spontanée varie suivant  $\Gamma\Omega^2/\Delta_L^2$ . Dans le régime où  $\Gamma \ll |\Delta_L|$ , le potentiel optique est la contribution dominante à la dynamique, avec des événements d'émission spontanée rares. En outre, le taux d'émission spontanée peut être réduit en augmentant le décalage en fréquence  $\Delta_L$  (à condition que le laser soit suffisamment puissant pour maintenir l'amplitude du potentiel au niveau requis).

Supposons maintenant qu'au lieu de soumettre l'atome à l'onde stationnaire de façon permanente, nous modulons l'intensité du rayonnement de façon périodique, avec période  $T_1$ , de telle sorte que le laser soit allumé pendant un court instant  $\tau$  (en comparaison du temps caractéristique de la dynamique externe de l'atome) et éteint le reste de la période. On obtient un système décrit par l'Hamiltonien :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\hbar\Omega^2\tau}{8\Delta_L} \cos(2k_L \hat{X}) \sum_n \delta_\tau(t' - nT_1) \quad (3.2)$$

où  $\delta_\tau(t) = 1/\tau$  si  $|t| \leq \tau/2$  et zéro sinon. Cette fonction converge vers la distribution de Dirac  $\delta$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ . Il est utile à ce stade d'introduire un ensemble de variables

adimensionnées :

$$\theta = 2k_L X \quad (3.3)$$

$$p = 2k_L T_1 P/M \quad (3.4)$$

$$t = t'/T_1 \quad (3.5)$$

$$K = \frac{\hbar \Omega^2 T_1 \tau k_L^2}{2M \Delta_L} \quad (3.6)$$

$$\hbar k = \frac{4\hbar k_L^2 T_1}{M}. \quad (3.7)$$

Dans la limite où les impulsions sont brèves  $\tau \ll T_1$ , on obtient alors :

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos \hat{\theta} \sum_n \delta(t - n)} \quad (3.8)$$

qui n'est autre que l'Hamiltonien du Kicked Rotor [33,80]. Ce faisant, on a réalisé un Kicked Rotor atomique [34]. L'Hamiltonien ci-dessus est associé à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \quad (3.9)$$

La constante  $\hbar k = 8\omega_R T_1$ , où  $\omega_R$  est la pulsation de recul, joue le rôle d'une constante de Planck effective, qui peut être changée "à volonté", caractéristique tout à fait remarquable de ce système, par exemple en modifiant la période  $T_1$ . Comme expliqué dans la suite, la physique la plus intéressante se déroule dans l'espace des impulsions. Les équations définissant les variables adimensionnées (3.3) sont telles que  $P/2\hbar k_L = p/\hbar k$ . Si l'atome considéré est suffisamment froid, tel que son impulsion est comparable avec  $2\hbar k_L$  (le quantum d'impulsion introduit par le potentiel optique -  $\hbar k_L/M$  est la vitesse de recul, typiquement de l'ordre de quelques mm/s), des effets quantiques peuvent être observés dans ce système. Heureusement, les pièges magnéto-optiques produisent des atomes froids dont l'impulsion typique est de l'ordre de  $\hbar k_L$ .

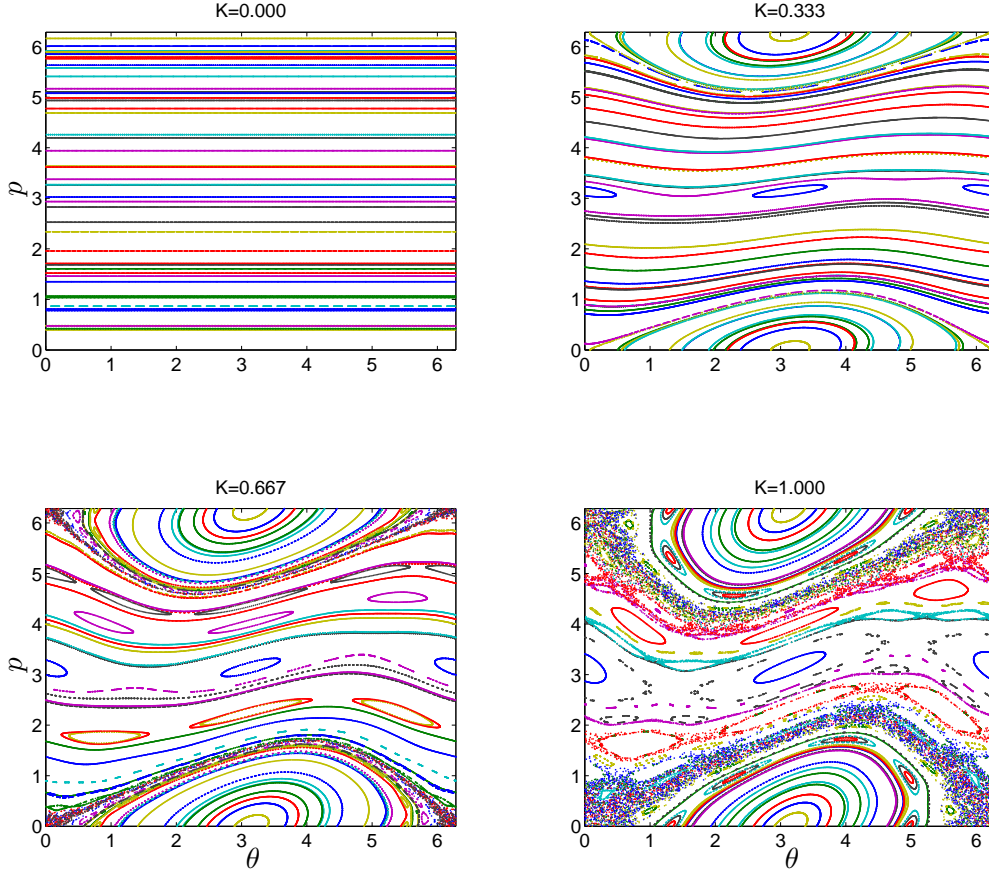
## A.1 Dynamique classique

Considérons tout d'abord le pendant classique du modèle considéré (3.8). Nous rappelons ici brièvement ses propriétés essentielles [31]. L'Hamiltonien :

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta \sum_n \delta(t - n), \quad (3.10)$$

décrit un pendule soumis à des impulsions de champ gravitationnel.  $p$  est son moment angulaire, variable conjuguée à l'angle  $\theta$ , le moment d'inertie est pris égal à l'unité et  $K$  représente l'amplitude des impulsions. La forme spécifique du forçage temporel nous permet de passer des équations différentielles du mouvement (équations d'Hamilton) à une application discrète en temps reliant les valeurs  $(\theta_n, p_n)$  de l'angle et du moment angulaire juste avant la  $n^{\text{ième}}$  impulsion à celles  $(\theta_{n+1}, p_{n+1})$  une période après :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + p_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

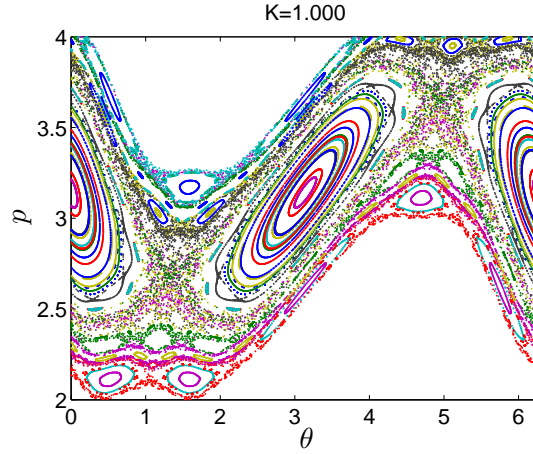


**Fig. 3.1:** Transition vers le chaos du Kicked Rotor à mesure que le coefficient de stochasticité  $K$  augmente. L'Application Standard est périodique en  $\theta$  et  $p$  de période  $2\pi$ , la cellule  $(\theta, p) \in [0, 2\pi]^2$  représentée est donc un tore. Les évolutions temporelles, jusqu'à  $t = 1000$  kicks, de 50 conditions initiales, uniformément distribuées sur  $[0, 2\pi]^2$ , sont représentées par différentes couleurs.

Cette application, communément appelée “Application Standard”, constitue une des pierres angulaires de la théorie du chaos dynamique [31, 81]. Ses propriétés ont été étudiées de façon extensive, tant sur le plan théorique que numérique.

Du fait que le forçage temporel en (3.10) est périodique en  $\theta$ , l'espace des phases du Kicked Rotor est un cylindre (il n'est pas restreint suivant l'axe des  $p$ ). On peut néanmoins se contenter de l'étude de la structure de l'espace des phases sur la cellule  $(\theta, p) \in [0, 2\pi]^2$ , l'application standard étant également périodique en  $p$  de période  $2\pi$ .

La transition vers le chaos du Kicked Rotor, à mesure que le paramètre de stochasticité  $K$  augmente (voir figure 3.1), est représentative de celle de systèmes Hamiltoniens intégrables soumis à une perturbation les rendant non-intégrables. Les concepts clés sont ici : orbites (quasi-) périodiques, théorème de Poincaré-Birkhoff et KAM [81]. En l'absence de perturbation,  $K = 0$ , les trajectoires du mouvement sont des lignes droites  $p = \text{const}$  et  $\theta_n = \theta_0 + 2\pi\omega_R n$  où  $\omega_R$  est la “pulsation de rotation libre”. Lorsque la perturbation est non-nulle,  $K > 0$ , ces trajectoires commencent à s'incurver. Certaines sont détruites, qui correspondent à des pulsations de rotation libre  $\omega_R$  rationnelles (orbites périodiques), alors que les orbites quasi-périodiques associées à des  $\omega_R$  suffisamment irrationnels sont préservées.



**Fig. 3.2:** Pour une orbite périodique du Kicked Rotor non-perturbé ( $K = 0$ ) associée à une pulsation de rotation libre  $\omega_R$  rationnelle, seul un nombre pair de points fixes subsistent à la perturbation. Ces points fixes sont alternativement stables (elliptiques) et instables (hyperboliques). Au voisinage de chaque point fixe, on peut appliquer de façon simultanée le théorème de Poincaré-Birkhoff et le théorème KAM, ceci conduisant à une structure auto-similaire. Cette structure est clairement visible dans la portion de l'espace des phases représentée.

vées (théorème KAM). La destruction des orbites périodiques à pulsations rationnelles se fait suivant le scénario de Poincaré-Birkhoff : l'orbite périodique fait place à une succession de points fixes elliptiques et hyperboliques ; au voisinage des points fixes hyperboliques la dynamique est stochastique (voir figure 3.2). Néanmoins, tant que l'amplitude de la perturbation  $K$  est faible, le mouvement suivant  $p$  est restreint par des tores non-résonants qui subsistent.

Finalement, lorsque la perturbation dépasse la borne critique  $K > K_{\text{cr}} \approx 0.97$  [31], le dernier tore non-résonant est détruit (le tore associé à une fréquence égale au nombre d'or) ; le mouvement suivant  $p$  n'est plus restreint. A mesure que  $K > K_{\text{cr}}$  augmente, les régions de l'espace des phases où le mouvement est régulier sont de tailles de plus en plus faibles si bien qu'il n'est plus nécessaire de tenir compte de leur influence sur le mouvement du système : dans la limite où  $K \gg 1$ , l'aire totale de ces régions est exponentiellement faible. Dans ce cas, la dynamique du système se trouve être complètement chaotique révélant des propriétés statistiques fondamentales telles que l'instabilité locale, le mélange (du fait du repliement suivant la direction  $\theta$ ), une décroissance rapide des corrélations et une entropie de Kolmogorov-Sinai positive [31]. La simulation numérique du système montre que même pour des valeurs  $K \gtrsim 5$ , notre modèle a toutes ces propriétés et peut être considéré comme complètement chaotique. Du fait de l'importance que revêt l'ensemble de ces caractéristiques pour la discussion de l'analogie de ce système avec les systèmes désordonnés usuels, nous commentons un peu plus en détail ces points dans la suite [voir pour plus de détails [31]].

### A.1.1 Instabilité locale

Quelle est la nature de l'instabilité apparaissant dans le Kicked Rotor pour  $K > K_{\text{cr}}$  ? Ici nous considérons le concept d'instabilité locale qui caractérise le comportement de

deux trajectoires initialement proches l'une de l'autre. Considérons le vecteur  $(\delta\theta_0, \delta p_0)$  décrivant la position mutuelle de conditions initiales voisines. L'évolution temporelle de ce vecteur est donnée par la différentielle de l'Application Standard (3.11) par rapport aux variables  $p$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned}\delta p_{n+1} &= \delta p_n + K \cos(\theta_n) \delta\theta_n \\ \delta\theta_{n+1} &= \delta\theta_n + \delta p_{n+1} .\end{aligned}\tag{3.12}$$

où la dépendance temporelle de  $\theta_n$  est donnée par l'Application Standard (3.11). Bien que cette “application tangente” soit linéaire, ses coefficients dépendent du temps (suivant  $\theta_n$ ) ; son traitement est presque aussi compliqué que celui de l'Application Standard.

Pour avoir une idée du comportement de l'application tangente (3.12), on peut considérer dans un premier temps les propriétés de la version simplifiée :

$$\begin{aligned}\delta p_{n+1} &= \delta p_n + \mathcal{K} \delta\theta_n \\ \delta\theta_{n+1} &= \delta\theta_n + \delta p_{n+1} ,\end{aligned}\tag{3.13}$$

où  $\mathcal{K}$  est une constante. Les trajectoires de cette dernière application peuvent être déterminées en diagonalisant la matrice de transfert correspondante. Les valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  associées aux vecteurs propres  $\mathbf{e}_{\pm}$  vérifient :

$$\lambda_{\pm} = 1 + \mathcal{K}/2 \pm \sqrt{\mathcal{K} + \mathcal{K}^2/4} .\tag{3.14}$$

Décomposant le vecteur  $(\delta\theta, \delta p)$  sur la base propre  $\{\mathbf{e}_{\pm}\}$ ,  $(\delta\theta, \delta p) = u\mathbf{e}_+ + v\mathbf{e}_-$ , l'évolution de l'application tangente se reformule simplement :

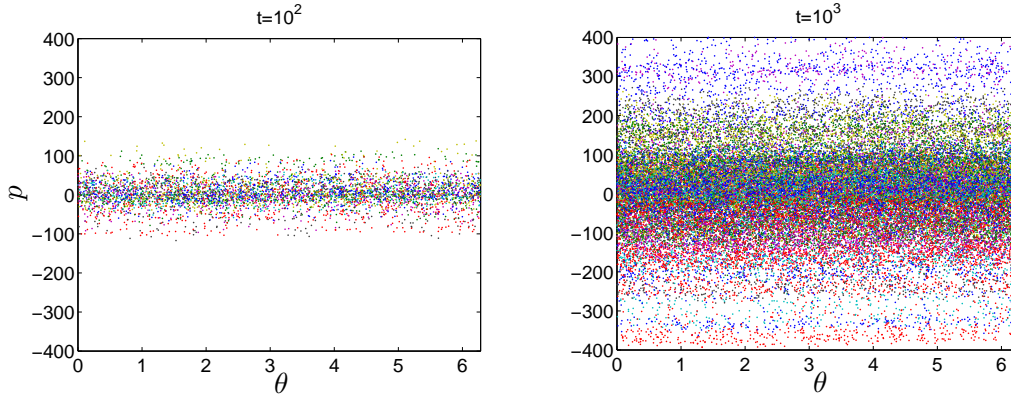
$$\begin{aligned}u_n &= u_0 \lambda_+^n \\ v_n &= v_0 \lambda_-^n .\end{aligned}\tag{3.15}$$

Dans le cas où  $\mathcal{K} \geq 0$  ou  $\mathcal{K} \leq -4$ , les valeurs propres  $\lambda_{\pm}$ , appelées exposants de Lyapunov, sont réelles et inverses l'une de l'autre. Supposons  $|\lambda_+| > 1$ , alors  $u_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Autrement dit, les trajectoires divergent exponentiellement l'une vis-à-vis de l'autre. L'entropie de Kolmogorov-Sinai  $h$  caractérise cette divergence exponentielle :

$$h = \ln |\lambda_+| .\tag{3.16}$$

Dans le cas du Kicked Rotor,  $\lambda_+$  dépend de  $\theta$  :  $\lambda_+(\theta)$ . L'entropie de Kolmogorov-Sinai est dans ce cas définie en considérant la moyenne sur les régions stochastiques de  $\ln |\lambda_+(\theta)|$  [31]. Lorsque  $K \gg 1$ , l'espace des phases est complètement chaotique, la moyenne peut donc se faire sur  $\theta$  entre  $[0, 2\pi]$ . En outre,  $|\lambda_+(\theta)| \approx |\mathcal{K}(\theta)| = K |\cos \theta|$  dans la limite des grands  $K$ . Ainsi :

$$h \approx \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \ln (K |\cos \theta|) \approx \ln \frac{K}{2} .\tag{3.17}$$



**Fig. 3.3:** Évolution temporelle de différentes conditions initiales (représentées par différentes couleurs) où  $p_0 = 0$  et  $\theta_0$  est uniformément distribué suivant  $[0, 2\pi]$ . Le paramètre de stochasticité est  $K = 10$ . L'espace des phases n'est plus replié suivant  $p$ , mais forme un cylindre de hauteur infinie. Le système explore des régions de plus en plus grandes de l'espace des phases à mesure que le temps passe. La dynamique ressemble à une marche aléatoire, bien que parfaitement déterministe.

### A.1.2 Comportement stochastique

La forte instabilité locale du mouvement (la divergence exponentielle de trajectoires initialement voisines) n'est pas seulement une caractéristique fondamentale du Kicked Rotor, elle a également des conséquences d'une extrême importance. Cette instabilité conduit à un mouvement irrégulier qui peut être assimilé à un mouvement stochastique.

Comment se fait-il que cette instabilité résulte en un comportement en marche aléatoire ? C'est le "mélange" conjugué à la sensibilité aux conditions initiales qui induit le comportement stochastique. Lorsque l'instabilité locale a fait diverger les trajectoires initialement voisines d'une quantité  $\delta\theta \approx 2\pi$ , un repliement a lieu (les phases sont définies modulo  $2\pi$ ) qui tue les corrélations temporelles avec les conditions initiales. En d'autres termes, la dynamique du Kicked Rotor est un processus à mémoire courte  $\approx 1/h$ . En comparaison, une marche aléatoire est un processus sans mémoire.

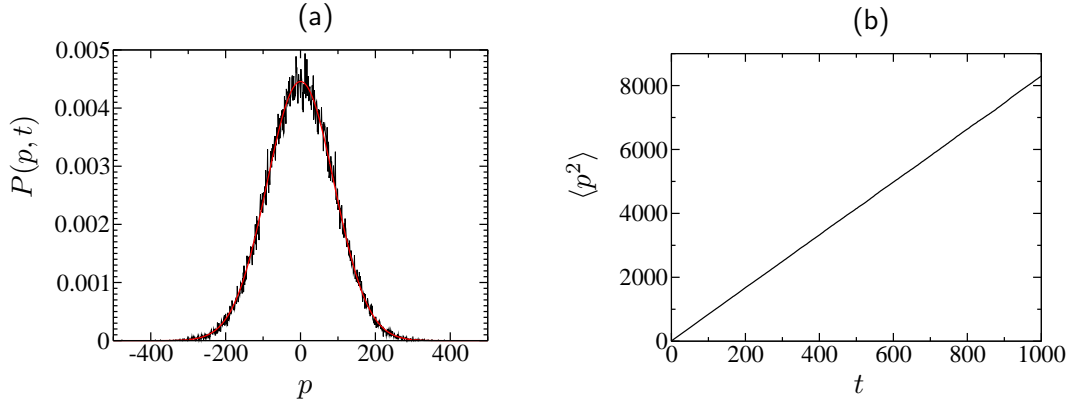
### A.1.3 Diffusion chaotique

Une des propriétés les plus fondamentales du Kicked Rotor est le caractère diffusif du mouvement en impulsion  $p$ , qui résulte de son comportement stochastique pour  $K > K_{cr}$  (voire figure 3.3). La dépendance temporelle de l'impulsion  $p$  peut être exprimée sous la forme [voir Eq. 3.11] :

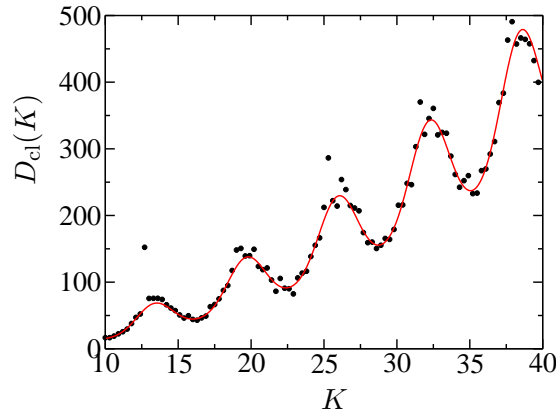
$$(p_n - p_0)^2 = K^2 \sum_{j,m}^{n-1} \sin \theta_j \sin \theta_m . \quad (3.18)$$

Du fait que les corrélations entre les phases décroissent rapidement (de façon exponentielle), le temps caractéristique associé étant  $\approx 1/h$ , la variation de l'impulsion est de forme diffusive (voir figure 3.4). Dans la limite où  $K \gg 1$ , on peut négliger complètement les corrélations entre phases, et, considérant un ensemble de trajectoires dont l'impulsion initiale est  $p_0 = 0$  et la phase initiale  $\theta_0$  distribuée de façon uniforme sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ ,





**Fig. 3.4:** (a) La distribution en impulsion du Kicked Rotor classique  $P(p, t = 10^3)$  (représentée en noir) est très bien approximée par une gaussienne (courbe rouge), caractéristique d'un transport diffusif. (b) L'évolution temporelle de la moyenne du carré de l'impulsion  $\langle p^2 \rangle$ , i.e. la variance de la distribution  $P(p, t)$ , est manifestement linéaire, i.e. évolue suivant une loi de diffusion. Le paramètre de stochasticité est grand  $K = 10$  et une moyenne sur  $10^5$  conditions initiales,  $p_0 = 0$  et  $\theta_0$  uniformément distribué sur  $[0, 2\pi]$ , a été effectuée.



**Fig. 3.5:** Oscillations du coefficient de diffusion  $D_{cl}$  (3.20) en fonction de  $K$  (points noirs) autour de  $D_{cl} = K^2/4$ , du fait des corrélations entre kicks résiduelles décrites par l'équation (3.21) dont la courbe est représentée en rouge.

la moyenne de l'impulsion au carré sur l'ensemble de ces trajectoires varie linéairement en fonction du temps,

$$\langle p^2 \rangle(t) \approx \frac{K^2}{2} t, \quad (3.19)$$

où  $t$  est mesuré en nombre de “kicks”  $n$  (dans la suite, nous continuerons à appeler une impulsion gravitationnelle “kick”).

De façon remarquable, les corrélations temporelles, “entre kicks”, ne cassent pas le caractère diffusif mais conduisent seulement à une renormalisation du coefficient de diffusion  $D_{\text{cl}}$  (défini sur l'énergie cinétique) [82] :

$$\boxed{\langle p^2 \rangle(t) = 2D_{\text{cl}}t}. \quad (3.20)$$

La différence entre  $D_{\text{cl}}$  et la valeur  $D_{\text{ql}} = K^2/4$  obtenue en négligeant les corrélations entre kicks s'exprime sous la forme :

$$D_{\text{cl}} = D_{\text{ql}} \left( 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right) \quad (3.21)$$

où la fonction de corrélation  $C_n = \langle \sin \theta_n \sin \theta_0 \rangle$  décroît très vite lorsque  $K \geq 4.5$ . La contribution principale est donnée par  $C_2 = -J_2(K)/2$  où  $J$  est la fonction de Bessel ( $C_1 = 0$ ). Les corrélations restantes n'apportent que de faibles corrections :

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{2} [J_3^2(K) - J_1^2(K)] \sim K^{-2} \\ C_4 &= \frac{J_2^2(K)}{2} \sim K^{-1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainsi, pour  $K \geq 4.5$ , la constante de diffusion  $D_{\text{cl}}$  varie de façon quadratique en  $K$  avec des corrections oscillantes (voir figure 3.5) [82] :

$$\boxed{D_{\text{cl}} \approx \frac{K^2}{4} \{1 - 2J_2(K) [1 - J_2(K)]\}}. \quad (3.23)$$

## A.2 Dynamique quantique

Quels sont les effets quantiques sur la dynamique classique chaotique du Kicked Rotor ? Pour traiter ce problème, nous revenons à l'expression de l'Hamiltonien quantique (3.8) décrivant le Kicked Rotor atomique. Le comportement de ce système est déterminé par l'équation de Schrödinger dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + K \cos \theta \sum_n \delta(t - n) \psi. \quad (3.24)$$

La forme du forçage temporel permet de formuler la dynamique de façon analogue à celle classique, i.e. d'adopter un point de vue stroboscopique, en ne considérant que les états  $|\psi(t)\rangle$  précédant le  $t^{\text{ième}}$  kick, qui vérifient :

$$|\psi(t+1)\rangle = \hat{U} |\psi(t)\rangle. \quad (3.25)$$

L'opérateur d'évolution sur une période  $\hat{U}$ , opérateur unitaire, s'écrit comme le produit de deux opérateurs,

$$\hat{U} = e^{-i\hat{p}^2/2\hbar} e^{-iK \cos \hat{\theta}/\hbar}, \quad (3.26)$$

le premier décrivant le kick :

$$\hat{J} = e^{-iK \cos \hat{\theta}/\hbar}, \quad (3.27)$$

le second correspondant à l'évolution libre durant une période :

$$\hat{V} = e^{-i\hat{p}^2/2\hbar}. \quad (3.28)$$

### A.2.1 Simulation numérique

La forme que revêt l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$  permet une simulation numérique simple et rapide du Kicked Rotor atomique. L'opérateur  $\hat{V}$  est en effet diagonal en représentation  $p$  et l'opérateur  $\hat{J}$  diagonal en représentation  $\theta$ . Or l'on peut passer facilement d'une représentation à l'autre par transformée de Fourier rapide.

Le fait que l'opérateur  $\hat{J}$  soit périodique en  $\theta$  de période  $2\pi$  facilite également la tâche, puisque ceci implique que l'on peut se restreindre à une base discrète en impulsion. L'opérateur kick  $\hat{J}$  ne couple en effet que des impulsions séparées d'un nombre entier du quantum  $\hbar$  (ceci correspond à un échange de multiples entiers de  $\pm 2\hbar k_L$  pour les atomes) :

$$\langle p' | \hat{J} | p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iK \cos \theta/\hbar} e^{-i(p-p')\theta/\hbar} = \sum_l i^l J_l(K/\hbar) \delta(p' - p = \hbar l). \quad (3.29)$$

Ainsi, considérant l'évolution d'une onde plane initiale  $|\beta\hbar\rangle$  avec  $\beta \in [0, 1)$ , la quantité  $\beta\hbar$ , communément appelée “quasi-impulsion”, est conservée.

Par conséquent, l'unique approximation faite dans le cas d'une simulation numérique du Kicked Rotor atomique utilisant des transformées de Fourier rapide est la discrétisation des valeurs de  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta_l = 2\pi l/L$  avec  $l = 1, \dots, L$ , qui correspond à la restriction que la base discrète en impulsion  $|p\rangle = |(l+\beta)\hbar\rangle$  est de taille finie  $L$ . Cette approximation peut être considérée comme bonne à partir du moment où la dynamique observée ne dépend pas de la taille de la base  $L$ .

Une simulation numérique typique du Kicked Rotor atomique consiste à itérer le calcul des composantes  $\langle (l+\beta)\hbar | \psi(t) \rangle$  d'une fonction d'onde initialement plane  $|\psi(t=0)\rangle = |p = \beta\hbar\rangle$ . Généralement, les propriétés de transport sont moyennées (de façon incohérente) sur la condition initiale  $|\psi(t=0)\rangle$ , i.e. sur la quasi-impulsion  $\beta\hbar \in [0, \hbar)$ . Ceci permet de simuler le cas expérimental (voir chapitre 4) dont la distribution en impulsion initiale, celle d'un nuage d'atomes froids issu d'un piège magnéto-optique, peut être considérée comme une somme incohérente d'ondes planes  $|\psi(t=0)\rangle = |p = \beta\hbar\rangle$ , avec  $\beta\hbar$  uniformément distribué sur toute la zone de Brillouin  $[0, \hbar)$  (voir section A.1 du chapitre 4 pour plus de précisions).

Du fait des propriétés énoncées ci-dessus, le transport quantique dans le Kicked Rotor peut être étudié en considérant la variable entière  $l$  plutôt que  $p = \hbar(l + \beta)$ . Dans la suite, nous adoptons cette démarche. Par exemple, nous considérons l'évolution temporelle de la

quantité  $\langle l^2 \rangle$  où la moyenne se fait sur les conditions initiales  $|\psi(t=0)\rangle = |p = \beta\hbar k\rangle$  spécifiées par  $\beta \in [0, 1)$ . Également, nous étudions la forme et la dynamique de la probabilité de diffusion quantique (voir section B.2 du chapitre 2) :

$$P(l, t) = \overline{|\psi[p = (l + \beta)\hbar k, t]|^2}, \quad (3.30)$$

moyennée de la même façon sur les conditions initiales. Dans l'équation précédente,  $\overline{X}$  dénote la moyenne de  $X$  sur la quasi-impulsion  $\beta$ .

### A.2.2 Localisation dynamique

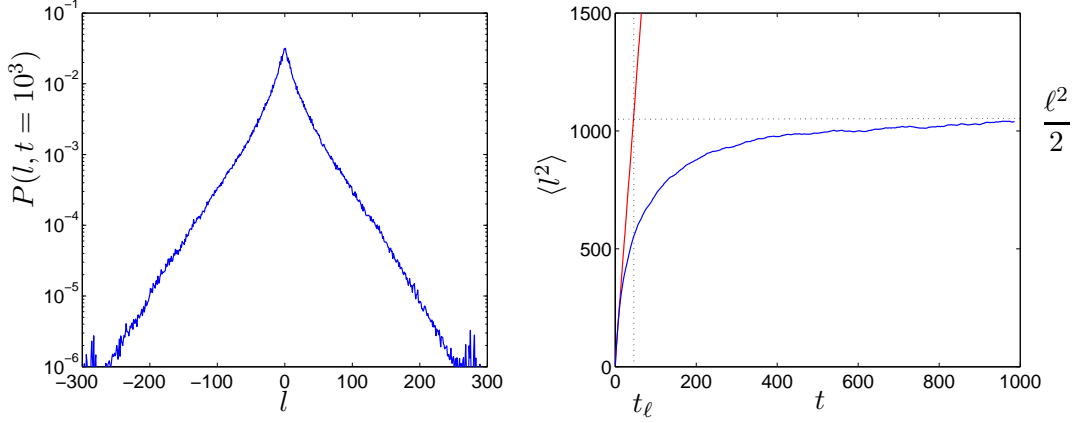
La dynamique quantique du Kicked Rotor atomique, telle que simulée numériquement (voir figure 3.6), est de nature très différente de celle classique. Une diffusion chaotique n'est observée que pour des temps inférieurs à un temps caractéristique dit "temps de localisation"  $t_\ell$ , après quoi la dynamique est gelée, ceci dans le cas où  $\hbar k/\pi$  est suffisamment irrationnel (nous reviendrons sur cette condition dans la suite). La variance de la probabilité de diffusion quantique (3.30)  $\langle l^2 \rangle$  tend alors vers une constante :

$$\langle l^2 \rangle(t \gg t_\ell) \approx \frac{\ell^2}{2}, \quad (3.31)$$

où la longueur caractéristique  $\ell$  est la longueur de localisation associée à la décroissance exponentielle de la probabilité de diffusion quantique (3.30) [voir Eq. (2.14)]

$$P(l, t \gg t_\ell) \approx \frac{1}{\ell} e^{-2l/\ell}, \quad (3.32)$$

dans la limite des temps longs  $t \gg t_\ell$ . Cette suppression quantique de la diffusion quantique, dont l'observation a pour la première fois été rapportée dans [80], est communément appelée "localisation dynamique", le terme dynamique faisant référence au fait que la localisation a lieu dans l'espace des impulsions. De fait, comme démontré dans [83], la localisation dynamique est intimement reliée à la localisation d'Anderson, avec néanmoins une différence majeure : la localisation dynamique a lieu dans l'espace des impulsions alors que la localisation d'Anderson a lieu dans l'espace réel.



**Fig. 3.6:** Évolution temporelle du Kicked Rotor atomique (3.26) correspondant aux paramètres  $K = 22$  et  $k = 2.85$ . (a) La probabilité de diffusion quantique  $P(l, t = 10^3)$  (3.30) est représentée en échelle semi-log. Elle est clairement exponentiellement localisée pour  $t \gg t_\ell$ . (b)  $\langle l^2 \rangle$  croît d'abord de manière diffusive (voir l'asymptote représentée en rouge) puis sature pour  $t \gg t_\ell$ .

## B Equivalence formelle entre le Kicked Rotor et le modèle d'Anderson

Les états propres de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$  (3.26) forment une base permettant de calculer l'évolution temporelle du Kicked Rotor. Ces états de Floquet  $|\Psi_\omega\rangle$  sont entièrement caractérisés par leur quasi-énergie  $\omega$ , définie modulo  $2\pi$  :

$$\hat{U}|\Psi_\omega\rangle = e^{-i\omega}|\Psi_\omega\rangle. \quad (3.33)$$

L'Hamiltonien, Eq. (3.8), est périodique en  $\theta$  de période  $2\pi$ , et de même pour l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$  (3.26). Ainsi, d'après le théorème de Bloch, un état propre de Floquet  $|\Psi_\omega\rangle$  s'écrit comme produit d'une fonction périodique en  $\theta$  et d'une onde plane  $\exp i\beta\theta$  avec  $\beta k \in [0, k)$  la quasi-impulsion. Une transformation triviale montre que l'on peut de façon équivalente considérer des fonctions périodiques en  $\theta$  dont le comportement est gouverné par l'Hamiltonien (3.8), où  $p$  est remplacé par  $p + \beta k$ . C'est cette démarche que nous adoptons ici ; nous notons l'Hamiltonien correspondant  $\hat{H}_\beta$  :

$$\hat{H}_\beta = \frac{(\hat{p} + \beta k)^2}{2} + K \cos \hat{\theta} \sum_n \delta(t - n), \quad (3.34)$$

et son opérateur d'évolution associé,  $\hat{U}_\beta$ .

### B.1 Opérateur d'évolution et modèle d'Anderson unitaire

Remarquons tout d'abord que l'opérateur d'évolution  $\hat{U}_\beta$  est similaire à un modèle d'Anderson unitaire (voir [84–86]), avec désordre pseudo-aléatoire. La matrice  $(U_{\beta_{l,l'}})$  de transition entre les états  $|p = kl\rangle$  et  $|p' = kl'\rangle$  s'écrit en effet comme le produit de l'opérateur unitaire  $(i^{l'-l} J_{l'-l}(K/k))$  qui a une structure de bande et d'un opérateur de multiplication par des phases pseudo-aléatoires  $(e^{-ik(l+\beta)^2/2} \delta_{l,l'})$ , où  $\delta_{l,l'}$  est le symbole de Kronecker. La

structure de bande de l'opérateur unitaire  $(i^{l'-l} J_{l'-l}(K/\hbar))$  est due à ce que la fonction de Bessel décroît extrêmement vite pour des distances  $\Delta l = |l' - l|$  grandes devant  $K/\hbar$  [87] :

$$J_{\Delta l}(K/\hbar) \sim \frac{1}{(\Delta l + 1)!} (K/\hbar)^{\Delta l + 1}, \text{ pour } \Delta l \gg K/\hbar. \quad (3.35)$$

Dans le cas où  $\hbar/\pi$  est "suffisamment irrationnel" (i.e. si la fraction continue de ce ratio est composée de petits entiers), les phases :

$$\phi_l = \hbar \frac{(l + \beta)^2}{2} \text{ modulo } [2\pi] \quad (3.36)$$

sont distribuées de façon pseudo-aléatoire [voir ci-dessous et [88, 89]].

Le modèle d'Anderson unitaire est localisé, comme démontré de façon rigoureuse [voir par exemple [86]].

## B.2 Equation aux valeurs propres et modèle de Loyd

Une analogie formelle peut être établie entre le Kicked Rotor et un modèle d'Anderson 1D (standard, i.e. non unitaire) en reformulant l'équation aux valeurs propres pour les états de Floquet (3.33) (la dérivation originale de ce résultat dans [83]).

– Premièrement, on réécrit l'opérateur kick  $\hat{J}$  sous la forme :

$$\exp(-iK \cos \hat{\theta}/\hbar) = \frac{1 - i\hat{t}}{1 + i\hat{t}}, \quad (3.37)$$

avec

$$\hat{t} = \tan(K \cos \hat{\theta}/2\hbar). \quad (3.38)$$

La fonction périodique  $t(\theta)$  peut être décomposée en une série de Fourier :

$$t(\theta) = \sum_l t_l e^{il\theta}, \quad (3.39)$$

où les coefficients  $t_l$  sont réels. Procédant de même pour la partie cinétique  $\hat{V}^\beta$ , on obtient :

$$\exp \left\{ -i[(\hat{p} + \hbar\beta)^2/2\hbar - \omega] \right\} = \frac{1 - i\hat{\mathcal{V}}}{1 + i\hat{\mathcal{V}}}, \quad (3.40)$$

où  $\hat{\mathcal{V}}$  est diagonal dans la base impulsionnelle  $|l\rangle = |p = \hbar l\rangle$ .

– Deuxièmement, on procède à la décomposition suivante dans la base impulsionnelle :

$$\frac{1}{1 + i\hat{t}} |\Psi_\omega\rangle = \sum_l a_l |l\rangle. \quad (3.41)$$

Alors, on peut réécrire l'équation propre pour les états de Floquet (3.33) sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{V}_l a_l + \sum_{l' \neq 0} t_{l'} a_{l-l'} = -t_0 a_l}. \quad (3.42)$$

Ceci est l'équation d'un modèle d'Anderson [voir section A.2 du chapitre 2] avec désordre pseudo-aléatoire. Les énergies sur sites,

$$\mathcal{V}_l = \tan \left\{ \frac{1}{2} [\omega - (l + \beta)^2 \hbar/2] \right\}, \quad (3.43)$$

sont distribuées de façon pseudo-aléatoire [88, 89]. Puisque la quantité  $\tilde{\phi}_l = \frac{1}{2}[\omega - (l + \beta)^2 \bar{k}/2]$  entre dans  $V_l$  comme argument de la fonction tangente, elle est définie de façon effective modulo  $\pi$ . Suivant un théorème de Weyl [90], la séquence  $\tilde{\phi}_l = \frac{1}{2}[\omega - (l + \beta)^2 \bar{k}/2]$  modulo  $[\pi]$  est ergodique dans l'intervalle  $[0, \pi]$  et recouvre cet interval avec une densité de probabilité uniforme lorsque  $\pm l = 0, 1, 2, \dots$ . Il s'ensuit que les  $\mathcal{V}_l$  ont une densité  $\mathcal{P}(\mathcal{V})d\mathcal{V} = d\tilde{\phi}/\pi$ . Puisque  $d\mathcal{V}/d\tilde{\phi} = 1 + \mathcal{V}^2$ , le désordre associé au Kicked Rotor est distribué suivant une Lorentzienne :

$$\mathcal{P}(\mathcal{V}_l) = \frac{1}{\pi(1 + \mathcal{V}_l^2)} . \quad (3.44)$$

Le potentiel associé au Kicked Rotor présente des propriétés fondamentales des potentiels aléatoires : il est ergodique, et ses corrélations sont à courte portée (dans [88, 89], il est montré que la fonction de corrélation de paire  $C_{l'} = \langle \tilde{\mathcal{V}}_{l+l'} \tilde{\mathcal{V}}_l \rangle_l$  du potentiel  $\tilde{\mathcal{V}}_l = \cos \bar{k}l^2$  est  $C'_l = \delta_{l',0}$ ). Ainsi, le Kicked Rotor est formellement équivalent à un modèle de Loyd [91].

Les éléments de transition  $t_{l'}$  ne sont pas restreints aux premiers voisins, mais ils décroissent exponentiellement avec  $l'$ . À vrai dire,  $t(\theta)$  est singulier lorsque  $K/\bar{k} > \pi$  et le comportement de  $t_{l'}$  est compliqué. Néanmoins, cette singularité *non-physique* peut être évitée en faisant correspondre le Kicked Rotor avec un autre modèle sur site pseudo-désordonné (voir [92]).

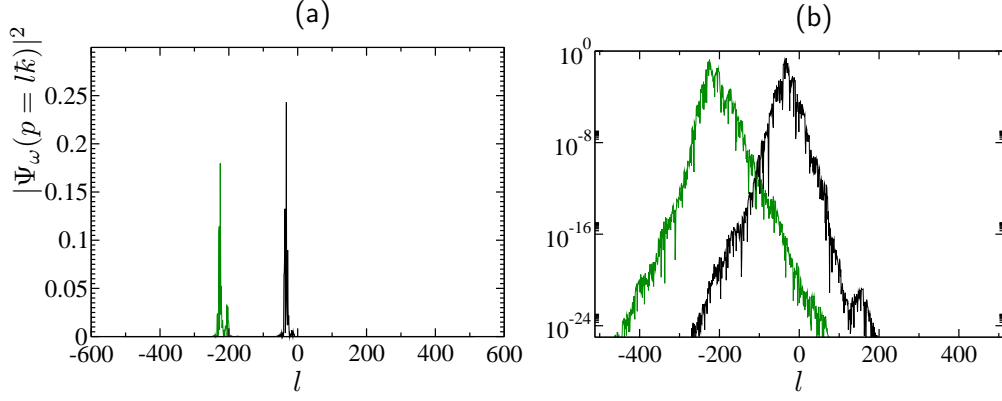
Le caractère pseudo-aléatoire (avec corrélations à courte portée) du désordre et la décroissance exponentielle des amplitudes de transition sont des conditions suffisantes pour que la localisation d'Anderson se produise [88, 89].

### B.3 Localisation des états de Floquet de l'opérateur d'évolution

Ainsi, tous les états de Floquet sont localisés exponentiellement. La longueur de localisation  $\ell$  associée à la décroissance exponentielle des états suivant les sites  $l$  (voir section B.1 du chapitre 2) dépend des paramètres  $K$  et  $\bar{k}$ , mais est similaire pour tous les états (voir figure 3.7). De fait, les amplitudes de transition  $t_{l'}$  augmentent en fonction du ratio de l'amplitude des kicks  $K$  sur  $\bar{k}$ , si bien que  $K/\bar{k}$  joue le rôle d'un paramètre de désordre. Lorsque  $K \approx 0$ , la partie diagonale désordonnée de (3.42) domine, et les états sont “trivialement” localisés, alors que dans la limite où  $K/\bar{k} \gg 1$ , c'est le transport qui domine et la localisation des états est due à des effets interférentiels non-triviaux. Il faut prendre garde du fait que la correspondance entre le degré de chaos et le degré de désordre est contre-intuitive : le Kicked Rotor peu chaotique (faibles valeurs de  $K$ ) correspond au modèle d'Anderson très désordonné, et le Kicked Rotor très chaotique (très diffusif) correspond au modèle d'Anderson faiblement désordonné.

L'analogie avec le modèle de Loyd permet, dans certaines limites, une expression simple de la longueur de localisation  $\ell$  des états de Floquet en fonction des paramètres  $K$  et  $\bar{k}$ . Faisant une hypothèse de loi d'échelle à un paramètre, en tout point similaire à celle formulée pour des échantillons du modèle d'Anderson de taille finie  $L$  (voir section C.2.4 du chapitre 2), une relation entre la longueur de localisation  $\ell$  et le coefficient de diffusion  $D_{\text{And}}$  du modèle d'Anderson pseudo-désordonné (3.42) est obtenue [93] :

$$\ell = \alpha D_{\text{And}} , \quad (3.45)$$



**Fig. 3.7:** Deux états de Floquets du Kicked Rotor atomique (3.26) correspondant aux paramètres  $K = 15$ ,  $\kappa = 2.85$ . (b) Les densités de probabilité  $|\Psi_\omega(p = l\kappa)|^2$  sont représentées en échelle semi-log et montrent clairement une localisation exponentielle avec des longueurs de localisation  $\ell$  similaires.

où  $\alpha = 1$  du fait que le désordre  $\mathcal{V}_l$  (3.43) est distribué de façon Lorentzienne. Les sites du solide considéré (3.42) correspondent à des états d'impulsions  $p = l\kappa$  du Kicked Rotor. Ils sont séparés de  $\kappa$ ; ainsi le coefficient de diffusion correspondant dans l'espace des impulsions  $p$  est  $D_{\text{ini}} = \kappa^2 D_{\text{And}}$ . Nous avons noté  $D_{\text{ini}}$  ce coefficient de diffusion car il détermine l'expansion, aux temps courts, d'un paquet d'onde initialement piqué. Par temps courts, nous entendons, temps  $t \ll t_\ell$  où les effets interférentiels jouent un rôle encore négligeable (voir section A du chapitre 7). Le comportement de  $D_{\text{ini}}$  en fonction de  $K$  et  $\kappa$  est, de façon générale, non trivial, du fait des corrélations du désordre  $\mathcal{V}_l$  (3.43), comme rappelé dans la suite.

Néanmoins, dans les limites semi-classique  $\kappa \ll 1$  et de grande stochasticité  $K \gg 1$ , on peut faire l'approximation  $D_{\text{ini}} \approx K^2/4$ . Dans ce cas, la longueur de localisation vérifie

$$\boxed{\ell \approx K^2/4\kappa^2}. \quad (3.46)$$

Cette valeur est celle que l'on trouve si l'on néglige les corrélations du désordre, par exemple en considérant les phases  $\phi_l$  (3.36) distribuées de façon complètement aléatoire sur  $[0, 2\pi)$  (voir section A du chapitre 7).

La relation  $\ell = D_{\text{ini}}/\kappa^2$  ainsi que l'hypothèse de loi d'échelle à un paramètre ont été vérifiées numériquement [48, 92, 94].



## C De la localisation des états de Floquet à la localisation dynamique

Afin de comprendre comment un état initialement *piqué*, e.g.  $|\psi(t=0)\rangle = |p = \beta k\rangle$ , peut d'abord s'étendre de façon diffusive, puis se "geler" dans une fonction d'onde localisée, nous utilisons les états de Floquet, base permettant de calculer l'évolution temporelle d'un état initial arbitraire  $|\psi(t=0)\rangle = \sum_i c_i |\Psi_i\rangle$  :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(t=0)\rangle = \sum_i c_i e^{-i\omega_i t} |\Psi_i\rangle. \quad (3.47)$$

Il faut noter que, dans la somme précédente (3.47), seuls les états de Floquet localisés au voisinage de l'état initial  $|\psi(t=0)\rangle$  contribuent de façon significative, puisqu'autrement  $|c_i| = |\langle \Psi_i | \psi(t=0) \rangle| \ll 1$ . Néanmoins, il faut toute une constellation de phases initiales  $\{\arg(c_i)\}$  pour permettre à ce que ces états, décroissant exponentiellement sur une longueur  $\ell$  beaucoup plus grande que la taille de l'état initial piqué, puissent, par superposition, former cet état initial très étroit.

Considérons le comportement temporel de la moyenne (quantique) du carré de l'impulsion  $\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \psi(t) | \hat{p}^2 | \psi(t) \rangle$  (à ne pas confondre avec la moyenne statistique sur les états initiaux, par exemple la moyenne suivant  $|\psi(t=0)\rangle = |p = \beta k\rangle$ ,  $\beta \in [0, 1]$ , notée  $\langle p^2 \rangle$ ), qui est donné par :

$$\langle \hat{p}^2 \rangle(t) = \sum_{i,j} c_i c_j^* e^{-i(\omega_i - \omega_j)t} \langle \Psi_j | \hat{p}^2 | \Psi_i \rangle. \quad (3.48)$$

L'expansion diffusive peut être interprétée comme une destruction progressive de la constellation de phases relatives  $\arg(c_i) - \arg(c_j)$  à mesure que le temps passe, du fait de la présence des facteurs  $\exp[-i(\omega_i - \omega_j)t]$  dans l'équation (3.48) précédente [95]. Deux états de Floquet cessent de contribuer de façon constructive dès lors qu'ils ont accumulé une phase relative  $(\omega_i - \omega_j)t$  de l'ordre de  $\pi$ . Ce processus est déterminé par la distribution d'espacement entre deux niveaux de quasi-énergie  $\eta = \omega_i - \omega_j$ , tenant compte des poids respectifs des états de Floquet correspondants dans la décomposition de l'état initial, soit de la fonction de corrélation du spectre local [95] :

$$\tilde{\gamma}(\eta) = \int d\omega \sum_{i \neq j} |\langle \Psi_i | \psi(t=0) \rangle|^2 |\langle \Psi_j | \psi(t=0) \rangle|^2 \delta(\omega - \eta/2 - \omega_i) \delta(\omega + \eta/2 - \omega_j). \quad (3.49)$$

Une caractéristique fondamentale est l'espacement moyen  $\Delta$  entre niveaux consécutifs. Dès lors que cet espacement a été atteint,  $t \gtrsim \pi/\Delta$ , l'état quantique ne s'étend plus de façon diffusive mais plutôt fluctue de façon quasi-périodique autour des enveloppes décroissant exponentiellement des états de Floquet (ceux participant de façon significative à la décomposition de l'état initial).

Cette analyse [voir [95] pour une étude détaillée de la fonction de corrélation du spectre local (3.49)] corrobore l'argument heuristique suivant, du type de celui de Thouless (voir section C.2.4 du chapitre 2 et [96]) : à mesure que le temps passe, la dynamique est influencée par des détails du spectre local d'une finesse de plus en plus grande. La finesse de résolution du spectre local,  $1/\Delta\omega$ , est en effet donnée par le principe d'incertitude temps-énergie :

$$t\Delta\omega \gtrsim 2\pi. \quad (3.50)$$

Ce n'est qu'à temps suffisamment long, tel que  $\Delta\omega \lesssim \Delta$ , que la nature *discrète* du spectre local est résolue, révélant ainsi le caractère localisé du système.

Un point fondamental est que la dynamique quasi-périodique de l'état quantique faisant suite à son expansion diffusive est spécifique à l'état initial et à l'ensemble des paramètres caractérisant le système. De ce fait, ces fluctuations quasi-périodiques s'annulent si on les moyenne de façon *incohérente* suivant un large ensemble d'états initiaux, comme on le fait ici (voir section A.2.1 de ce chapitre). Ainsi, aux temps  $t \gtrsim \pi/\Delta$ , la dynamique *moyenne*, caractérisée par  $\langle l^2 \rangle(t)$  ou  $P(l, t)$ , est stationnaire et localisée. On peut interpréter  $\pi/\Delta$  comme le temps de localisation  $t_\ell$ . Celui-ci peut être relié à la longueur de localisation, comme expliqué par la suite.

De l'ordre de  $\ell$  états de Floquet ont un poids significatif dans la décomposition de l'état initial piqué. Les quasi-énergies associées à ces états étant uniformément réparties sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , l'espacement moyen entre deux niveaux consécutifs  $\Delta$  est de l'ordre de  $\Delta \sim 2\pi/\ell$ . Ainsi, le temps de localisation  $t_\ell$ , qui est tel que  $\Delta\omega(t_\ell)$  (3.50) est de l'ordre de  $\Delta$ , soit  $t_\ell \sim 2\pi/\Delta$ , varie comme la longueur de localisation (application du critère de Thouless [96]) :

$$\boxed{t_\ell \sim \ell}. \quad (3.51)$$

## D Effets des résonances quantiques

L'évolution temporelle déterminée par l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$  (3.26) peut, dans certains cas très particuliers [97], différer grandement de celle précédemment décrite (i.e. de celle d'un système pseudo-désordonné).

Considérons en effet le cas où la constante de Planck effective  $\hbar$  est un multiple rationnel de  $4\pi$  :

$$\hbar = 4\pi \frac{s}{L}, \quad (3.52)$$

( $s$  et  $L$  étant des entiers premiers entre eux), et où la quasi-impulsion  $\beta\hbar$  est telle que  $\beta$  est un rationnel :

$$\beta = \frac{m}{2s}, \quad (3.53)$$

avec  $m$  un entier tel que  $0 \leq m < 2s$ . Nous nous intéressons à la dynamique gouvernée par l'opérateur :

$$\hat{U}_\beta = e^{-iK \cos \hat{\theta}/\hbar} e^{-i\hbar(\hat{l}+\beta)^2/2}, \quad (3.54)$$

où  $\hat{l}$  est l'opérateur de moment angulaire tel qu'en représentation  $\theta$ ,  $\hat{l} = -id/d\theta$  avec conditions aux bords périodiques (voir section B.1 du présent chapitre). Si les conditions de résonance quantique (3.52) et (3.53) sont vérifiées, le potentiel  $\mathcal{V}_l$  (3.43) est périodique de période  $L$  ; les états de Floquet sont par conséquent des ondes de Bloch de période  $L$ , délocalisées. Ceci peut se voir directement en considérant l'opérateur  $\hat{U}_\beta$  (3.54), qui, dans ce cas, commute avec des translations de multiples de  $L$  dans l'espace des  $l$ , ceci conduisant à des bandes dans son spectre de quasi-énergie. De façon générale, ces bandes ne sont pas plates, ceci impliquant un spectre parfaitement continu qui conduit à une évolution balistique de l'impulsion.

Néanmoins, la largeur des bandes décroît rapidement à mesure que l'ordre  $L$  de la résonance augmente, si bien que l'évolution balistique n'est observable qu'à des temps suffisamment longs. En particulier, dans le cas où  $(K/\hbar)^2 \ll L$ , la largeur des bandes décroît de façon exponentielle à mesure que  $L$  augmente [33]. Une telle propriété est en accord avec le fait que le spectre de quasi-énergie est discret dans le cas non-résonnant ( $\hbar \approx \text{const.}$  avec  $s \rightarrow \infty$  et  $L \rightarrow \infty$ ). Cette prédiction apparaît de façon encore plus claire si l'on considère l'analogie du Kicked Rotor avec le modèle d'Anderson (voir section B du présent chapitre). De fait, pour un solide désordonné, une relation entre la longueur de localisation  $\ell$  et la taille de la bande  $\tilde{\Delta}$  est bien connue, qui apparaît lorsque les conditions aux bords du cristal sont changées [4] :

$$\tilde{\Delta} \sim \exp(-L/\ell). \quad (3.55)$$

Ici,  $L$  est la taille du cristal et  $\ell$  est la longueur de localisation définie à partir de la décroissance des états propres [voir Eq. (2.11)], pour  $\ell \ll L$ . Il est intéressant de noter, qu'en dépit du fait que tous les états de Floquet sont, strictement parlant, délocalisés dans le cas d'une résonance quantique (ce sont des ondes de Bloch), ils peuvent apparaître localisés sur une échelle de taille petite devant  $L$ . Ceci est le cas lorsque  $(K/\hbar)^2 \ll L$ , comme vérifié numériquement [94].

Cette observation numérique peut être rendue compte, *de façon rigoureuse*, en formulant la dynamique du Kicked Rotor résonant en termes de théorie des champs [32]. Ceci permet

de faire correspondre le Kicked Rotor résonant à un modèle  $\sigma$  non linéaire *identique* à celui décrivant la physique des solides désordonnés [98]. Cette théorie des champs hérite de la topologie en anneau due à la condition de périodicité en  $l$  imposée par la résonance, i.e. le modèle  $\sigma$  non linéaire obéit à une condition de périodicité  $l + L \equiv l$ . Quelles en sont les conséquences? La réponse dépend de la taille  $L$  en comparaison de la longueur de localisation  $\ell \sim K^2/4k^2$ . Lorsque  $L \gg \ell$ , la dynamique diffusive est stoppée par les effets interférentiels impliquant le phénomène de localisation. Néanmoins, les fonctions d'onde vérifient la condition de périodicité  $\Psi(l + L) = \Psi(l)$ . L'émergence de la localisation pour  $L > \ell$  n'est *pas incompatible* avec le fait que les ondes sont des fonctions de Bloch. Bien sûr, une véritable localisation n'est possible qu'à la limite où  $k$  est irrationnel, i.e.  $L \rightarrow \infty$ .

Afin d'observer le phénomène de localisation dynamique, il faut donc se placer loin des résonances quantiques *simples*. Dans ce cas, les résonances ont pour seul effet résiduel de décaler les oscillations du coefficient de diffusion classique  $D_{\text{cl}}$  (voir section A.1.3 du présent chapitre). De fait, la même méthode de calcul de la constante de diffusion que dans le cas classique peut être utilisée pour le modèle quantique avec  $K \gg 1$  et  $k \gtrsim 1$ . Utilisant la représentation d'Heisenberg de la dynamique quantique, il est clair que la relation (3.18) est également vérifiée dans le régime quantique. Les premières corrélations (3.22) ont été calculées par Shepelyansky [48] et il s'avère qu'elles sont en très bon accord avec celles du cas classique avec  $K$  remplacé par  $[(2/k) \sin(k/2)]K$ . Le coefficient de diffusion initial  $D_{\text{ini}}$  (cf. la section B.3 de ce chapitre) est ainsi relié au coefficient de diffusion classique  $D_{\text{cl}}$  via :

$$D_{\text{ini}} \approx D_{\text{cl}} \left[ K \frac{2}{k} \sin \left( \frac{k}{2} \right) \right], \quad (3.56)$$

où  $D_{\text{cl}}(K)$  est donnée par l'équation (3.21). Dans la limite semi-classique,  $k \rightarrow 0$ , on retrouve  $D_{\text{ini}} \approx D_{\text{cl}}$ . Ainsi, dans le cas général, les résonances ont pour effet mineur de renormaliser les propriétés de localisation ( $t_\ell \sim \ell \sim D_{\text{ini}}/k^2$ ), mais ne brisent pas ce phénomène.

## E Classes de symétrie

Les propriétés de localisation dépendent, de façon cruciale, des symétries anti-unitaires du système désordonné. Au contraire des symétries unitaires, elles ne conduisent pas à des nombres quantiques conservés. Mais la présence ou l'absence d'une symétrie anti-unitaire peut avoir des conséquences profondes et mesurables sur les observables d'un système quantique. En particulier, casser une symétrie anti-unitaire modifie grandement la probabilité de retour à l'origine [14] et la longueur de localisation [99].

Une symétrie anti-unitaire fondamentale est la symétrie par renversement du temps :

$$T : t \rightarrow -t, x \rightarrow x, p \rightarrow -p, \quad (3.57)$$

qui autorise la contre-propagation, ce qui conduit au doublement de la probabilité de retour à l'origine (voir section C.1.1 du chapitre 2). Lorsque la symétrie  $T$  est cassée, du fait, dans le cas d'un système désordonné électronique, d'un champ magnétique, par exemple, ceci n'est pas possible. La localisation est en un sens moins forte. L'effet de cette symétrie anti-unitaire est universel, i.e. il ne dépend pas des détails microscopique du désordre (distribution de probabilité du désordre, voir section A du chapitre 2).

Dans le cas du Kicked Rotor, où le phénomène de localisation a lieu dans l'espace des impulsions plutôt que dans celui des positions, la symétrie  $T$  (3.57) n'est pas pertinente. Néanmoins, la transformation :

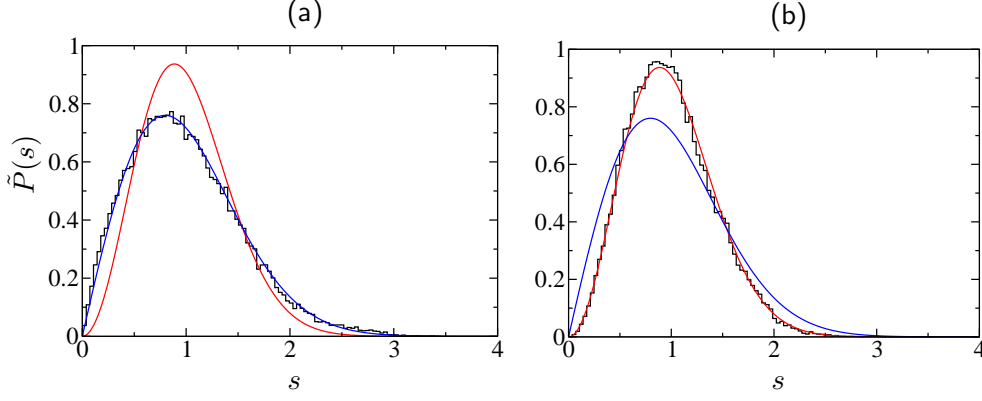
$$T_c : t \rightarrow -t, \theta \rightarrow -\theta, p \rightarrow p, \quad (3.58)$$

produit du renversement du temps et de la parité, joue un rôle équivalent à celui de  $T$  pour les systèmes désordonnés [100–102]. Il faut noter que  $T_c$  ne diffère de  $T$  que par un échange des impulsions et des positions.

Une manière effective de caractériser la symétrie de l'Hamiltonien  $\hat{H}$  du Kicked Rotor (3.8) est d'étudier les propriétés de symétrie de l'opérateur d'évolution associé,  $\hat{U}$  (3.26), qui se reflètent dans les statistiques des quasi-énergies  $\omega$  (voir section B de ce chapitre). Puisque la dynamique peut être obtenue à partir de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$ , toutes les informations pertinentes sur la dynamique sont en fait contenues dans  $\hat{U}$ . En particulier,  $\hat{U}$  et  $\hat{H}$  partagent la même classe d'universalité. Les classes d'universalité pour décrire les statistiques des quasi-énergies  $\omega$  du système quantique complexe (chaotique) que l'on considère, sont les ensembles circulaires de Dyson, notamment l'ensemble circulaire orthogonal (COE) et l'ensemble circulaire unitaire (CUE) (nous nous restreignons ici au cas d'un système sans spin) [30]. Ces ensembles décrivent les propriétés statistiques de matrices aléatoires unitaires symétriques (COE) ou non (CUE) par renversement du temps.

Il existe de nombreuses prédictions de la théorie des matrices aléatoires [103] auxquelles les données peuvent être comparées [33]. Une quantité souvent utilisée est la distribution  $\tilde{P}(s)$  d'espacement  $s$  de niveaux voisins,  $s$  étant exprimé en unité de l'espacement moyen. Une des prédictions les plus importantes de la théorie des matrices aléatoires est la forme approchée de  $\tilde{P}(s)$  :

$$\tilde{P}(s) = A s^{\tilde{\beta}} e^{-Bs^2}. \quad (3.59)$$



**Fig. 3.8:** (a) Histogramme : Distribution statistique des niveaux de quasi-énergie pour le Kicked Rotor d'opérateur d'évolution associé  $\hat{U}$  (3.26) avec  $k = 4\pi\sqrt{5}$  et  $K/k = 100$ . La taille de la base discrète  $l$  est limitée à  $L = 64 < \ell$ . Une moyenne de la distribution de l'espace des niveaux voisins  $\tilde{P}(s)$  a été effectuée suivant 1000 valeurs de la quasi-impulsion  $\beta k$  tirées au hasard entre  $[0, k]$ . Les données sont en très bon accord avec la statistique COE donnée par l'équation (3.59) avec  $\tilde{\beta} = 1$  (courbe représentée en bleue). (b) Histogramme : Distribution statistique des niveaux de quasi-énergie pour un Kicked Rotor modifié (3.61) ne présentant pas la symétrie  $T_c$ . Les paramètres sont identiques à ceux de (a) hormis  $K/k = 50$ . La phase  $\varphi$  brisant la symétrie est prise égale au nombre d'or que multiplie  $\pi$  :  $\varphi = \pi \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Les données sont en très bon accord avec la statistique CUE donnée par l'équation (3.59) avec  $\tilde{\beta} = 2$  (courbe représentée en rouge)

Ici, les coefficients  $A$  et  $B$  sont des paramètres de normalisation déterminés par les conditions :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds \tilde{P}(s) &= 1 \\ \int_0^\infty ds s \tilde{P}(s) &= 1, \end{aligned} \quad (3.60)$$

et  $\tilde{\beta}$  est un paramètre relié à la symétrie des matrices aléatoires :  $\tilde{\beta} = 1$  pour COE et  $\tilde{\beta} = 2$  pour CUE. Le paramètre  $\tilde{\beta}$ , connu sous le nom de “paramètre de répulsion”, caractérise le degré de répulsion de niveaux voisins et est d'une importance fondamentale pour caractériser les propriétés de symétrie.

En présence de localisation, la classification que nous venons de donner des propriétés statistiques des spectres ne peut être valable que dans la mesure où la taille  $L$  de la base en  $l$  choisie (voir sections A.2.1 et D de ce chapitre) est plus petite que la longueur de localisation  $\ell$  :  $L < \ell$ . C'est seulement dans ce cas que les états de Floquet sont fortement corrélés entre eux et montrent une répulsion des niveaux. Dans l'autre cas,  $L \gg \ell$ , il existe des états propres localisés en des centres éloignés de plus de la longueur de localisation  $\ell$ . Les corrélations entre ces états sont exponentiellement faibles, ils montrent ainsi une répulsion de leurs niveaux également exponentiellement faible. On s'attend alors à une distribution statistique Poissonienne des niveaux, et ce indépendamment de la classe de symétrie considérée [33, 102]. Il n'y a pas de problème à prendre  $L < \ell$  ici, puisque nous entendons uniquement déterminer une procédure effective de caractérisation des propriétés de symétrie de l'Hamiltonien  $\hat{H}$  plutôt que d'obtenir une représentation réaliste de la dynamique du Kicked Rotor.

Le spectre des quasi-énergies du Kicked Rotor vérifie, dans la limite où  $\ell > L$ , une loi du type (3.59) avec pour paramètre de répulsion  $\tilde{\beta} = 1$  [voir figure 3.8 (a)]. Ceci indique l'appartenance du Kicked Rotor à la classe d'universalité COE.

Dans le cas où la symétrie  $T_c$  est brisée, la répulsion des niveaux voisins n'est plus linéaire, mais quadratique :  $\tilde{\beta} = 2$  [voir figure 3.8 (b)]. La symétrie  $T_c$  peut être brisée de différentes façons [32, 100–102, 104], par exemple en déphasant le potentiel  $K \cos \theta$  un kick sur deux, aboutissant au Kicked Rotor modifié suivant :

$$\hat{H}_{\text{CUE}} = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos \hat{\theta} \sum_n \delta(t - 2n) + K \cos(\hat{\theta} + \varphi) \sum_n \delta(t - 2n + 1) , \quad (3.61)$$

avec  $\varphi$  un multiple irrationnel de  $\pi$ . L'opérateur d'évolution associé à  $\hat{H}_{\text{CUE}}$  est le produit de l'opérateur faisant évoluer le système du kick  $2n$  à  $2n + 1$  et de celui faisant évoluer du kick  $2n + 1$  au kick  $2n + 2$ . Notons que la phase  $\varphi$  a le même effet qu'un champ magnétique pour les systèmes désordonnés électroniques et que cette façon de briser la symétrie semble pouvoir être réalisée expérimentalement. Lorsque la symétrie anti-unitaire  $T_c$  est brisée, la longueur de localisation est doublée, comme dans le cas des systèmes désordonnés électroniques soumis à un champ magnétique (voir les observations numériques [101, 102]).

Un point important est que les propriétés statistiques des spectres sont insensibles aux détails microscopiques du désordre  $\mathcal{V}_l$  (3.43), i.e. des valeurs (irrationnelles) de  $k$  et de la quasi-impulsion  $\beta k$ . Autrement dit, ces propriétés sont universelles.

# Réalisation expérimentale du Kicked Rotor périodique avec des ondes de matière

## Sommaire

A	Atomes froids soumis à un potentiel lumineux . . . . .	3
B	Chaos quantique et désordre . . . . .	4
C	Quasi-périodicité temporelle et dimensionnalité effective . . .	5
D	Limitations expérimentales . . . . .	6
E	Caractérisation de la transition d'Anderson . . . . .	6
F	Classe d'universalité du Kicked rotor quasi-périodique . . . . .	7
G	Fonction d'onde critique . . . . .	7
H	Plan de la thèse . . . . .	8

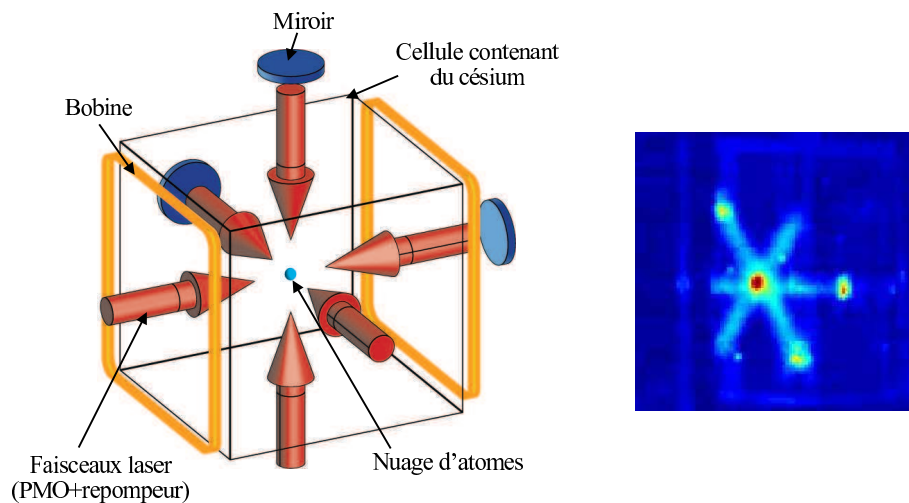
La réalisation expérimentale du Kicked Rotor atomique par l'équipe de J. C. Garreau et P. Szriftgiser à Lille a permis l'observation de la transition d'Anderson, comme exposé dans le chapitre suivant. Ici, nous rappelons succinctement le montage expérimental mis au point par cette équipe, puis mettons l'accent sur les limitations que ce montage implique.

## A Montage expérimental

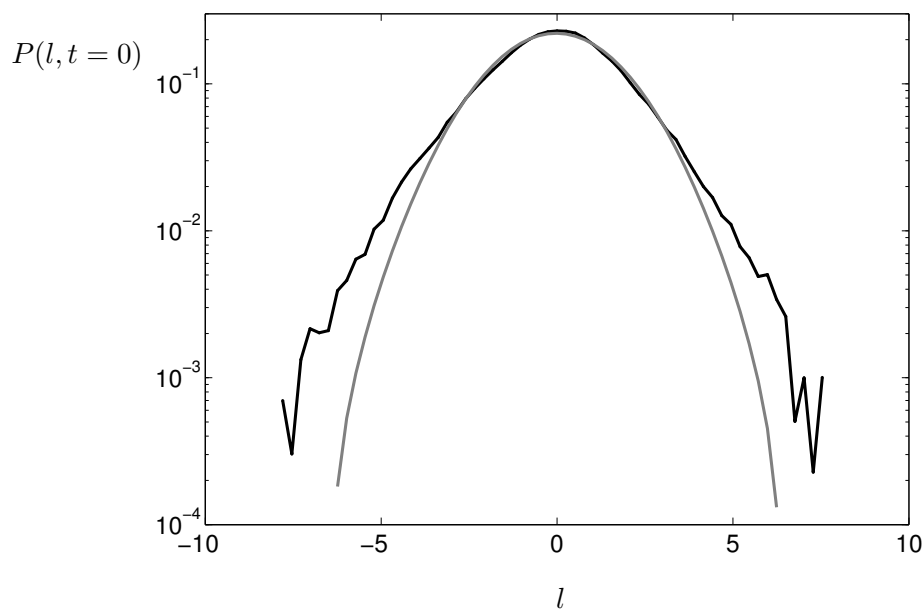
*Cette section est inspirée des thèses de Hans Lignier [105] et Julien Chabé [106].*

La réalisation du Kicked Rotor atomique revient à appliquer une séquence d'impulsions lumineuses sur un nuage d'atomes de césium froids obtenu grâce à un piège magnéto-optique (PMO). La distribution en impulsion finale est la quantité fondamentale caractérisant le transport quantique dans ce système. Elle est mesurée par spectroscopie Raman.





**Fig. 4.1:** À gauche, vue schématique du piège magnéto-optique. Les trois faisceaux (chacun constitués d'une radiation piège et d'une radiation repompeuse) sont rétro-réfléchis sur des miroirs. Le nuage d'atomes froids se forme au voisinage de leur intersection commune, qui coïncide avec le zéro du champ magnétique créé par les bobines. À droite, photographie en couleurs fausses du piège. Le gradient de couleur (du bleu vers le rouge) représente l'intensité de fluorescence : on distingue clairement les trois paires de faisceaux et au centre le nuage d'atome froids.



**Fig. 4.2:** La distribution en impulsion du nuage issu du piège magnéto-optique (représentée en noir) a, de façon approchée, une forme Gaussienne  $P(l, t = 0) \approx \exp(-l^2/2\sigma_l^2)/\sqrt{2\pi}\sigma_l$ . La température du nuage, déterminée à partir de la largeur de cette distribution ( $\sigma_l \approx 2$ ), est d'environ  $\approx 3.2\mu K$ .

## A.1 Piège magnéto-optique

La technique du piègeage magnéto-optique [107] permet d’obtenir un nuage de petite taille ( $\sim 1 \text{ mm}^3$ ), constitué de quelques  $10^7$  atomes dont la température mesurée est de  $3.2 \mu\text{K}$  (voir figure 4.2). Ceci est particulièrement pratique. En effet, il est facile de faire interagir ce nuage avec des faisceaux lasers de diamètre ordinaire ( $\sim 1 \text{ mm}$ ). En outre, la distribution en impulsion du nuage est très bien modélisée par une somme incohérente d’ondes planes formant une Gaussienne de largeur à mi-hauteur égale de l’ordre de quelques  $\hbar k_L$ , soit de taille généralement bien inférieure à la longueur de localisation, condition nécessaire à l’observation de la localisation dynamique.

Le double processus de refroidissement et de piègeage se déroule dans une cellule de verre contenant une vapeur de césium à très basse pression ( $10^{-8} \text{ mbar}$ ) placée dans un champ magnétique créé par deux bobines, et irradiée par trois paires de faisceaux laser rétro-réfléchis (dits lasers PMO), orthogonaux entre eux et se croisant en son centre (voir le schéma figure 4.1).

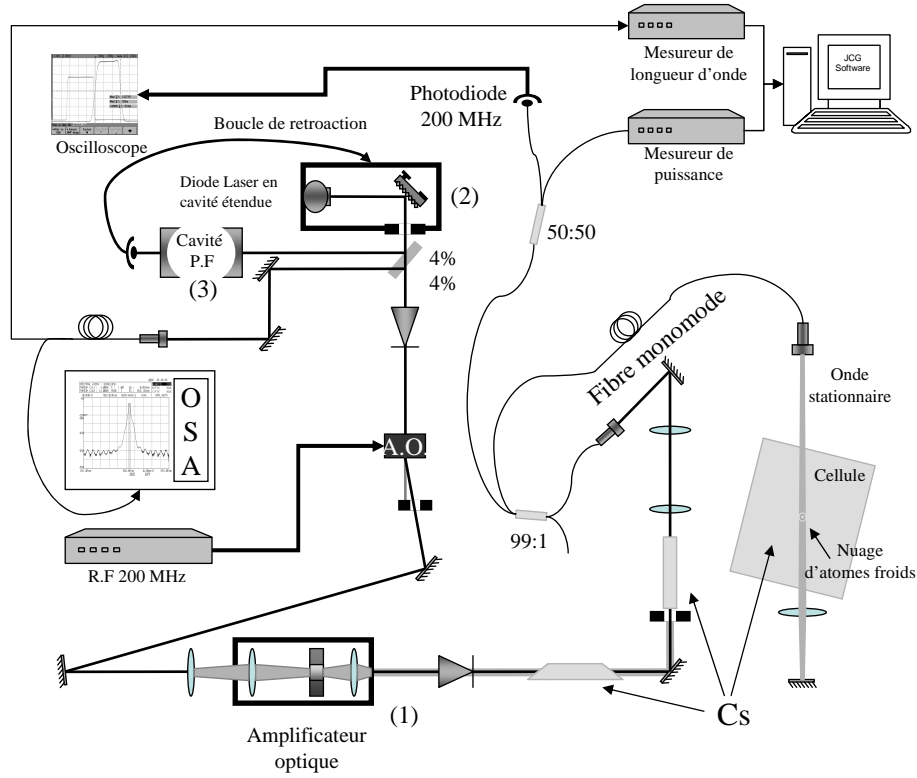
Plus précisément, les bras du PMO sont constitués chacun de deux faisceaux lasers superposés, accordés sur la transition  $D_2$  du césium. Le premier est accordé sur une fréquence légèrement inférieure à la transition  $F_f = 4 \rightarrow F_e = 5$ . Il permet de “refroidir” les atomes par effet Doppler et de les piéger au zéro du champ magnétique. Le second, dit repompeur, recycle les atomes ayant effectué une transition vers  $F_f = 3$  vers les cycles de fluorescence induits par le laser PMO. Il est accordé sur la transition  $F_f = 3 \rightarrow F_e = 4$ . Sans ce faisceau, les atomes s’accumuleraient dans l’état  $F_f = 3$ , échappant au processus de refroidissement. La température du nuage ainsi obtenu est de quelques dizaines de micro-Kelvin. Faisant suite à cette séquence de refroidissement Doppler, une longue phase Sisyphé (25 ms) où le champ magnétique est coupé [108] permet d’abaisser la température jusqu’à une valeur de  $3.2 \mu\text{K}$ .

Une fois ce refroidissement effectué, les faisceaux lasers sont coupés via des modulateurs acousto-optiques et des obturateurs (minimisant d’éventuelles fuites).

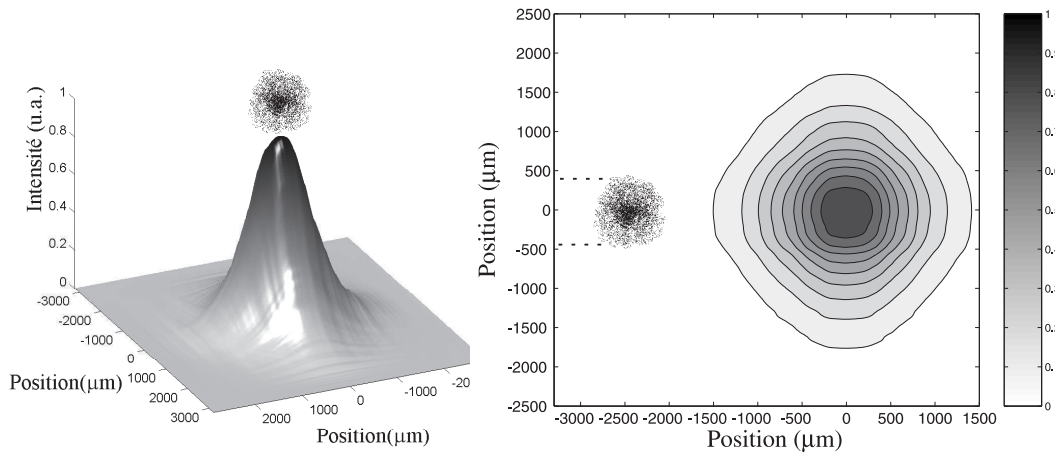
## A.2 Onde stationnaire pulsée

La phase suivante consiste en l’interaction du nuage d’atomes froids avec des impulsions courtes de l’onde stationnaire. Bien que le césium présente de nombreux niveaux d’énergie, il peut être considéré, lorsque soumis à l’onde stationnaire désaccordée décrite dans la suite, comme un atome à deux niveaux  $F_f = 4$ ,  $F_e = 5$ . L’onde stationnaire désaccordée agit alors principalement comme un potentiel sinusoïdal que l’on peut pulser, réalisant le Kicked Rotor atomique (voir section A du chapitre 3).

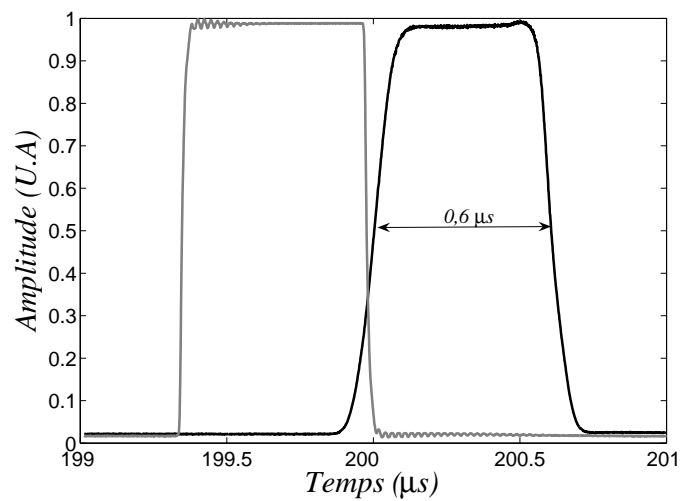
Le montage utilisé pour réaliser les impulsions courtes d’onde stationnaire est représenté en figure 4.3. La fréquence  $\omega_L/2\pi$  de l’onde stationnaire est fixée par une diode laser “maître” dont la puissance du faisceau, d’environ 6 mW, est amplifiée par un amplificateur optique jusqu’à 375 mW. Le faisceau amplifié subit ensuite deux filtrages de types différents. Le premier consiste en une absorption des composantes spectrales résonantes avec le césium par un passage dans une cellule de 10 cm de long contenant une vapeur de césium (une



**Fig. 4.3:** Schéma du dispositif générant l'onde stationnaire pulsée. Un amplificateur laser à semi-conducteur est injecté par un laser maître (diode montée en cavité externe de fréquence centrale désaccordée ( $\delta_L/2\pi$ ) par rapport à la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$ ; puissance égale à 6 mW). En jouant sur la température de la diode (réglage grossier) et sur la longueur de la cavité externe (réglage fin),  $\delta_L$  est ajustable (de quelques unités à plusieurs centaines de GHz). Sa fréquence est aux alentours de 352 THz et sa finesse est de l'ordre du MHz. Elle est stabilisée sur une plage inférieure à 75 MHz grâce à une boucle de rétroaction utilisant le signal de transmission d'une cavité Pérot-Fabry confocale ( $\sim 750$  MHz d'intervalle spectral libre et une finesse de 10 au minimum). Parallèlement, la fréquence est contrôlée par un mesureur commercial de fréquence optique. Quant à la puissance laser à la sortie de l'amplificateur optique, celle-ci s'élève à 375 mW. Ce faisceau, filtré par une cellule contenant une vapeur de césium, est conduit vers la cellule via une fibre optique dont l'injection est pilotée par un modulateur acousto-optique permettant de réaliser des impulsions d'une durée minimum de 60 ns. A la sortie de la fibre, le faisceau traverse la cellule à l'endroit du PMO puis est rétro-réfléchi par un miroir, créant ainsi une onde stationnaire (pulsée).



**Fig. 4.4:** Deux vues comparant la taille du nuage d'atomes froids avec la distribution d'intensité transverse de l'onde stationnaire. Les dimensions du nuage d'atomes froids sont bien inférieures à celle de l'onde stationnaire : largeur  $\sigma_R \approx 0.15\text{mm}$  de la distribution spatiale Gaussienne des atomes froids contre 1,5 mm de largeur à mi-hauteur du profil Gaussien en intensité lumineuse.



**Fig. 4.5:** L'impulsion de radio-fréquence appliquée au modulateur acousto-optique et l'impulsion laser en sortie de fibre qui en résulte. La durée de ces impulsions est de 600 ns. Les temps de montée et de descente de l'impulsion optique (25 ns) sont limités par l'esclave.

estimation donne une absorption de puissance d'un ordre de grandeur à ces fréquences). Le second filtrage sélectionne un seul mode transverse du faisceau, le mode fondamental gaussien, par injection dans une fibre optique mono-mode (qui a pour autre fonction de transporter le faisceau jusqu'à la cellule). La perte de puissance entre la sortie de l'amplificateur optique et la sortie de la fibre s'élève alors à 75 %. A la sortie de la fibre, le champ laser est collimaté (utilisation d'un télescope) de telle sorte que les dimensions transverses du faisceau soient plus importantes que celle du nuage d'atomes (voir figure 4.4). En fin de compte, à la sortie du télescope, le faisceau possède les caractéristiques suivantes :

- un profil gaussien en intensité d'une largeur à mi-hauteur de  $1490 \pm 10 \mu\text{m}$  ;
- une puissance de  $92,0 \pm 2,0 \text{ mW}$ .

L'onde stationnaire est construite par réflexion à l'aide d'un miroir placé de l'autre côté de la cellule.

Deux modulateurs acousto-optiques sont utilisés pour générer des impulsions courtes d'onde stationnaire. Le premier dévie le trajet du faisceau laser maître vers l'amplificateur optique. Déclenché quelques centaines de microsecondes avant la séquence des impulsions, il a pour fonction de laisser le temps au laser amplifié de relaxer (cela permet de diminuer les fluctuations de puissance des impulsions et d'améliorer l'isolation optique). En aval de l'amplificateur, le second modulateur acousto-optique pilote l'injection de la fibre ; il génère ainsi des impulsions d'une durée minimale de 60 ns – mais est généralement fixée entre  $0,6 \mu\text{s}$  et  $1 \mu\text{s}$  – avec des temps de montée et de chute d'environ  $\sim 25 \text{ ns}$  chacun (voir figure 4.5). Le signal radio-fréquence qui pilote ce modulateur acousto-optique est donc à la source de la séquence des impulsions. Dans le cas où il s'agit d'une séquence d'impulsions périodique, un simple commutateur actionné par un signal TTL généré par un monostable se charge de bloquer (temps de vol) ou de laisser passer (impulsion) la radio-fréquence. En position bloquante, la coupure est d'au moins 60 dB.

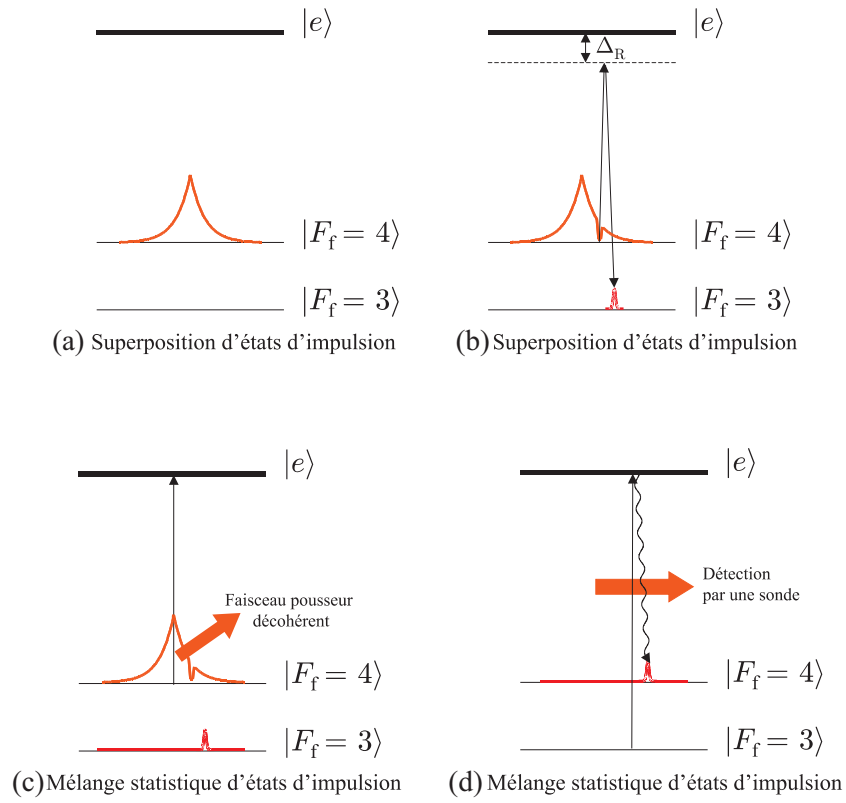
### A.3 Vélocimétrie Raman

Une caractéristique particulièrement intéressante de l'expérience ici présentée est la possibilité de mesurer, “in situ”, la fonction d'onde (ou à tout le moins son module carré). La distribution de vitesses des atomes est mesurée au moyen de transitions Raman sélectives en vitesse via l'effet Doppler (voir schéma de principe représenté en figure 4.6), permettant une résolution de l'ordre de 2 mm/s.

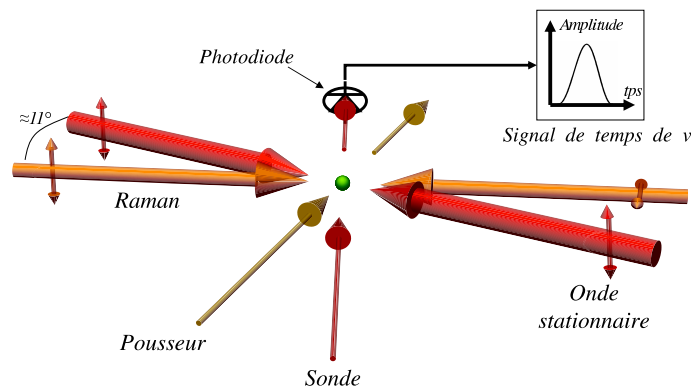
Le transfert de population est réalisé en soumettant le nuage d'atomes à une impulsion laser Raman, de durée  $\tau_R$ , composée de deux faisceaux contre-propageants de fréquences  $\omega_{R1}$  et  $\omega_{R2}$  désaccordées des fréquences des transitions respectives  $F_f = 4 \rightarrow e$  et  $F_f = 3 \rightarrow e$  [ $e \equiv (F_e = 3, 4, 5)$ ] d'une valeur  $\delta_R \gg \Gamma$  ( $\Gamma/2\pi \approx 5,3 \text{ MHz}$  est la largeur des niveaux composant  $e$ ). Si la condition de résonance

$$\omega'_{R2} - \omega'_{R1} = \omega_H, \quad (4.1)$$

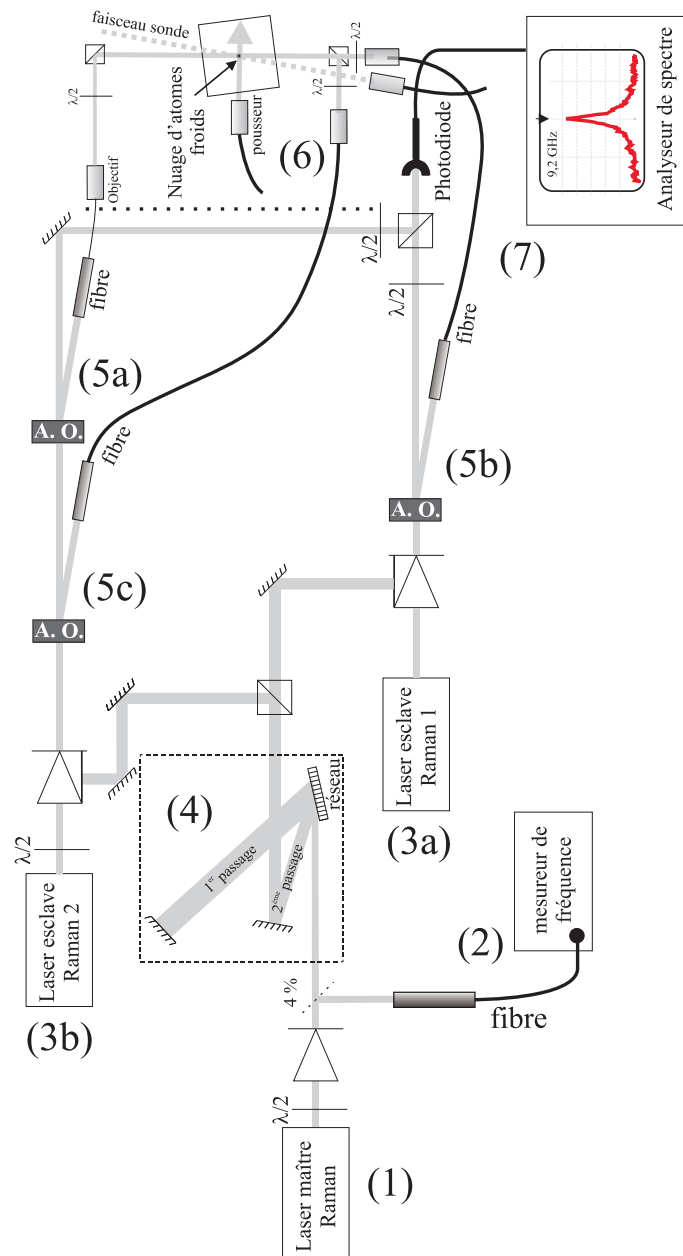
est vérifiée, alors la population de l'état  $F_f = 4$  est couplée, de façon cohérente, par une transition stimulée à deux photons, à l'état  $F_f = 3$  (distants de  $\omega_H/2\pi = 9,2 \text{ GHz}$ ). Cette



**Fig. 4.6:** Principe de la vélocimétrie Raman. (a) L'ensemble des atomes se trouve dans une superposition d'états d'impulsion (états externes) et dans l'état interne  $F_f = 4$ . (b) Une impulsion Raman sélectionne une classe d'impulsion en la transférant dans l'état  $F_f = 3$ . (c) Un faisceau pousseur expulse alors les atomes non-sélectionnés, se trouvant encore dans l'état  $F_f = 4$ , hors de la zone de détection. (d) Le faisceau repompeur replace les atomes de  $F_f = 3$  dans  $F_f = 4$  afin qu'ils puissent interagir avec le faisceau sonde.



**Fig. 4.7:** Configuration des faisceaux lasers impliqués dans le processus de vélocimétrie Raman. Les faisceaux Raman (représentés en orange) sélectionnent une certaine classe de vitesse. Puis le faisceau "Pousseur" (en jaune) expulse les atomes non sélectionnés hors de la zone de détection. Enfin, les atomes restant (chutant librement) passent au travers du faisceau sonde (en beige). Le signal d'absorption est recueilli sur la photodiode à l'arrière plan qui fournit un signal de temps de vol.



**Fig. 4.8:** Schéma du montage de détection Raman. Le spectre de la diode laser maître (1) dont le courant d'alimentation est modulé par un signal micro-onde est composé de trois raies séparées de 4,6 GHz. La fréquence centrale est contrôlée par un mesureur commercial de longueur d'onde optique (2). Deux diodes lasers, Raman 1 (3a) et Raman 2 (3b) sont injectées sur les bandes latérales. Afin de faciliter cette injection, ce faisceau est dispersé angulairement en passant deux fois, grâce à un miroir, sur un réseau de diffraction (4) de 1800 traits/mm et d'une longueur de 5 cm, et optimisé pour favoriser l'ordre 2. Les deux faisceaux Raman sont transportés vers la cellule grâce à des fibres optiques monomodes dont l'injection est contrôlée par des modulateurs acousto-optiques (5a, 5b, 5c). Deux configurations sont possibles : contre-propageante et co-propageante. A la sortie des fibres (6), la puissance de chacun des faisceaux est de 13,5 mW. Parallèlement, nous nous assurons que les faisceaux laser Raman sont bien injectés sur les bandes latérales du laser maître en mesurant leur battement au moyen d'une photo-diode rapide (7).

condition de résonance s'exprime dans le repère mobile associé aux atomes de vitesse  $\mathbf{p}/m = p/m \mathbf{e}_z$ .

Dans le repère lié au laboratoire, cette condition s'écrit

$$\omega_{R2} - \omega_{R1} = \omega_H + \delta_p, \quad (4.2)$$

où le terme

$$\delta_p = (\mathbf{k}_{R2} - \mathbf{k}_{R1}) \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{\hbar(\mathbf{k}_{R1} - \mathbf{k}_{R2})^2}{2m} \quad (4.3)$$

est la somme du décalage de fréquence dû à l'effet Doppler (premier terme) et du décalage correspondant à l'impulsion de recul acquise après absorption et émission des deux photons (deuxième terme).

L'expression (4.3) s'exprime simplement en fonction de l'impulsion de recul  $p_r = \hbar k_L$  ( $k_L \approx |\mathbf{k}_{R1}| \approx |\mathbf{k}_{R2}|$ ) :

$$\delta_p = -2 \frac{k_L}{m} (p + p_r), \quad (4.4)$$

Ainsi, le couplage entre les deux états hyperfins n'est possible que pour les atomes d'impulsion

$$\boxed{p_s = \frac{m}{2k_L} \delta_R - p_r}, \quad (4.5)$$

où  $\delta_R$  est le désaccord Raman :

$$\delta_R = (\omega_{R2} - \omega_{R1}) - \omega_H. \quad (4.6)$$

Par ailleurs, le temps d'interaction  $\tau_R$  du nuage d'atomes avec les radiations Raman joue un rôle important : la population de la classe d'impulsion  $p_s$  est entièrement transférée vers l'état  $F_f = 3$  lorsque  $\tau_R |\Omega_{\text{eff}}| = \pi$  ("pulse  $\pi$ ") où

$$\Omega_{\text{eff}} = -\frac{\Omega_{R1} \Omega_{R2}^*}{2\Delta_R}, \quad (4.7)$$

est la pulsation de Rabi effective moyennée dans le temps ( $\Omega_{R1,R2} = -d\mathbf{E}_{1,2}/\hbar$  sont les pulsations de Rabi de chacun des deux faisceaux constituant le dispositif). Ainsi pour une puissance donnée des faisceaux (fixant  $\Omega_{\text{eff}}$ ), le transfert de population est maximal pour une durée :

$$\tau_R = \frac{\pi}{|\Omega_{\text{eff}}|}. \quad (4.8)$$

Les étapes qui suivent ont pour objet la mesure d'un signal proportionnel à la classe d'impulsion sélectionnée (voir figure 4.7). Un faisceau laser accordé sur la transition  $F_f = 3 \rightarrow F_f = 4$  irradie d'abord le nuage afin de briser les cohérences qui lient les états  $F_f = 3$  et  $F_f = 4$  (c'est-à-dire de transformer la superposition d'états internes en un mélange statistique) et de pousser (spatialement) les atomes qui se trouvent dans l'état  $F_f = 4$ . Il ne reste alors dans cette région de la cellule que les atomes sélectionnés, ayant impulsion  $p_s$  et état interne  $F_f = 3$ . Finalement, le faisceau repompeur replace ces atomes dans l'état  $F_f = 4$ , et un faisceau accordé sur la transition  $F_f = 3 \rightarrow F_f = 4$  sonde le nuage des atomes restants par absorption. Le signal d'absorption est mesuré au moyen d'une photo-diode.



La séquence entière (comprenant également le forçage par l'onde stationnaire pulsée) est répétée, où le désaccord Raman est réglé de façon à sélectionner une nouvelle classe de vitesse, permettant la reconstruction de la distribution de vitesse.

Le schéma du dispositif expérimental utilisé pour générer les faisceaux Raman est représenté sur la figure 4.8.

## B Déviations du dispositif expérimental au modèle théorique

Nous décrivons ici les déviations les plus importantes de l'expérience au modèle théorique (3.8).

### B.1 Durée finie des impulsions d'onde stationnaire

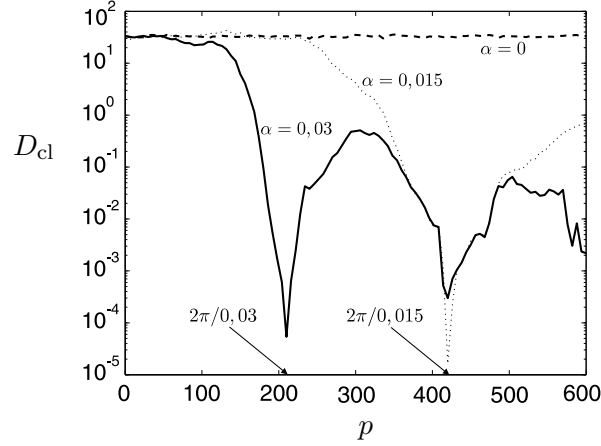
Les kicks d'onde stationnaire ont une durée finie  $\tau$  (3.2) (voir figure 4.5). Ce n'est que dans la limite où cette durée  $\tau$  est très petite devant la période  $T_1$  du forçage temporel que l'approximation de forçage en impulsions de Dirac peut être faite ; cette limite n'est généralement pas accessible expérimentalement. Néanmoins, le phénomène de localisation dynamique est observable avec le forçage temporel expérimental, dans certains régimes de paramètres que nous allons préciser. Une propriété cruciale est que la localisation dynamique est un phénomène *robuste*, universel, qui ne dépend pas des détails microscopiques, du moment qu'on a une évolution Hamiltonienne périodique.

Dans le régime classique, l'effet de la durée finie des kicks est remarquable : la région stochastique ne recouvre plus l'ensemble de l'espace des phases mais une région de taille finie en impulsion [34, 109]. Ceci peut se comprendre via l'argument heuristique suivant. Pendant la durée  $\tau$  du kick, une particule d'impulsion  $P$  parcourt la distance  $\tau P/m$ . Si le chemin parcouru est égal à une période spatiale de potentiel sinusoïdal, l'énergie reçue par l'atome est nulle : l'atome d'impulsion

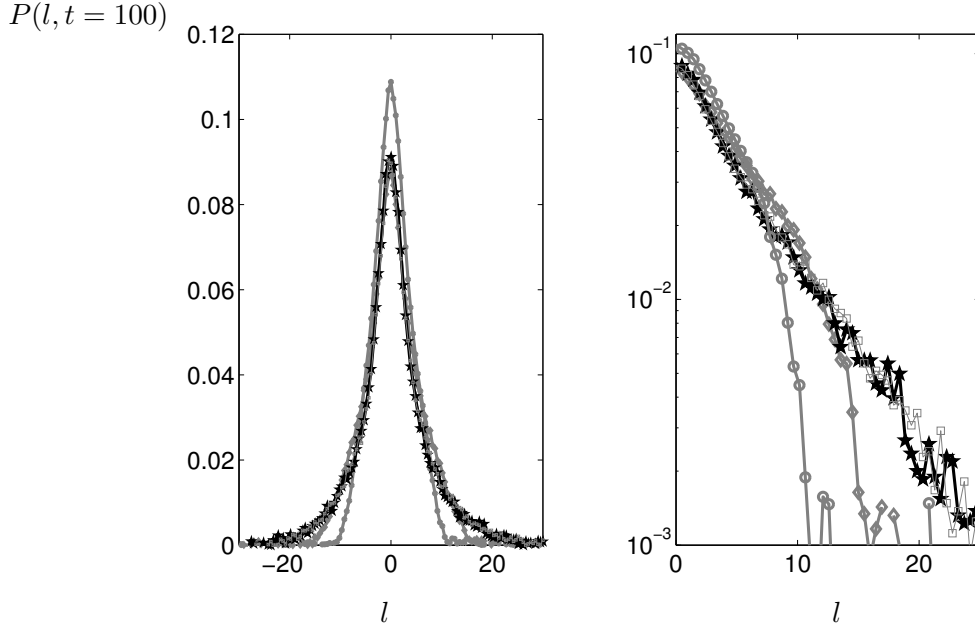
$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{\lambda m}{2\tau}, \text{ i.e., en unités adimensionnées :} \\ p_{\max} &= \frac{2\pi}{\alpha}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

avec  $\alpha = \tau/T_1$ , ne ressent pas le forçage (voir figure 4.9). Ainsi, la durée finie des pulses implique que des atomes rapides  $p \leq p_{\max}$  perçoivent un forçage d'amplitude  $K_{\text{eff}}(p)$  inférieure à celle du forçage perçu par les atomes lents. Pour des impulsions  $p$  telles que l'amplitude du forçage ressentie  $K_{\text{eff}}$  est inférieure à  $K_{\text{cr}} \approx 0.97$  (voir section A.1 du chapitre 3), la dynamique classique peut ne plus être stochastique, mais régulière, formant des tores de KAM. Ces tores constituent les limites d'une "boîte classique".

Dans le régime quantique, les propriétés de transport sont déterminées par l'opérateur d'évolution sur une période associé aux kicks expérimentaux, de durée finie  $\tau$ ,  $\hat{U}_\tau$ , et en particulier par les éléments de matrice  $(U_{\tau,l,l'})$  non diagonaux. Nous suivons ici l'analyse par Blümel et al. [109] des effets de kicks de durée finie (kicks ayant une forme différente mais similaire à celle des kicks expérimentaux). La dépendance de  $|U_{\tau,l,l+\Delta l}|^2$  suivant  $l$  est caractérisée par un changement abrupte qui a lieu en  $l \approx l_{\max} = p_{\max}/\hbar$ .  $|U_{\tau,l,l+\Delta l}|^2$  est à peu près constant pour  $l \leq l_{\max}$  et vaut  $|U_{\tau,l,l+\Delta l}|^2 \approx J_{\Delta l}^2(K/\hbar)$  en bon accord avec les valeurs correspondant au Kicked Rotor (voir section A.2.1 du chapitre 3). En revanche lorsque  $|l| > l_{\max}$ ,  $|U_{\tau,l,l+\Delta l}|^2$  tombe à zéro très rapidement si bien que les états  $|l\rangle$  avec  $|l| > l_{\max}$  sont presque complètement découplés des états  $|l| < l_{\max}$ . Cette claire distinction entre les deux régions partitionne les états de Floquet en deux ensembles : ceux qui ont un



**Fig. 4.9:** Dépendance en impulsion du coefficient de diffusion classique pour  $K = 10$  et trois valeurs du paramètre  $\alpha = \tau/T_1$  :  $\alpha = 0$  (ligne tiretée),  $\alpha = 0.015$  (ligne pointillée),  $\alpha = 0.03$  (ligne pleine). Les courbes résultent de simulations numériques de l'évolution temporelle de trajectoires dont la condition initiale est  $p$  et  $\theta$  uniformément distribué sur  $[0, 2\pi)$ .



**Fig. 4.10:** Observation *expérimentale* de l'effet de durée finie des kicks d'onde stationnaire sur les distributions en impulsion, obtenues après 100 kicks d'onde stationnaire où  $K \simeq 7$  et  $\hbar = 3.46$ , correspondant à quatre valeurs différentes de la durée des pulses :  $\tau = 0.5, 1.0, 2.0$  et  $5.0 \mu\text{s}$ , soit,  $\alpha = 0.015, 0.03, 0.06$  et  $0.15$ . Les deux distributions associées aux valeurs les plus faibles de  $\alpha$ , correspondant aux conditions des expériences présentées aux chapitres 5 et 7 suivants, figurées par des carrés gris clairs et des étoiles noires, sont confondues et exponentiellement localisées. La taille finie de la boîte classique n'a pas d'incidence sur la localisation dynamique dans ces deux cas, puisque  $\ell \ll l_{\text{max}}$  avec  $l_{\text{max}} \approx 120$  pour  $\alpha = 0.015$  et  $l_{\text{max}} \approx 60$  pour  $\alpha = 0.03$ . En revanche, la distribution correspondant à  $\alpha = 0.06$ , représentée en diamants gris, a sa forme altérée : ses ailes chutent brutalement à zéro au voisinage de  $l_{\text{max}} \approx 30$ . La dernière distribution, correspondant à  $\alpha = 0.15$  et représentée avec des cercles gris, est notablement différente d'une distribution exponentielle ( $l_{\text{max}} \approx 12$  dans ce cas). Ce phénomène ne joue pas dans les expériences décrites aux chapitres 5 et 7 suivants, correspondant à  $\alpha \approx 0.03$ .

grand recouvrement avec les états  $|l| > l_{\max}$  ressemblent aux états non perturbés  $|l\rangle$  du fait de la faible valeur des amplitudes de transition en comparaison des éléments diagonaux de la matrice  $(U_{\tau_l, l'})$ . Ces états sont trivialement localisés. L'autre ensemble regroupe les états qui ont un grand recouvrement avec les états  $|l| < l_{\max}$ . Ici, l'on s'attend à ce que la localisation d'Anderson ait lieu (si  $\bar{k}$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ ). Des états localisés en des sites  $l$  éloignés des bords de la “boîte classique” de plus de la longueur de localisation  $\ell$  seront exponentiellement localisés. Des états localisés en des sites voisins des bords de la boîte classique seront encore plus localisés du fait de la “localisation triviale” au delà des bords. Ceci est analogue à une localisation d'Anderson dans un échantillon de solide de taille finie.

Conclusion, c'est seulement dans le cas où la taille  $\approx p_{\max}$  de la boîte classique est grande devant la longueur de localisation  $p_\ell$  que la localisation dynamique peut être observée (voir figure 4.10). Pour ce qui est des observations expérimentales présentées dans cette thèse, la durée des impulsions  $\tau \approx 900\text{ns}$  est suffisamment petite en comparaison de la période  $1/T_1 = 36\text{kHz}$ ,  $\alpha = \tau/T_1 = 0.025$ , pour que ces effets de taille finie soient négligeables (voir figure 4.10).

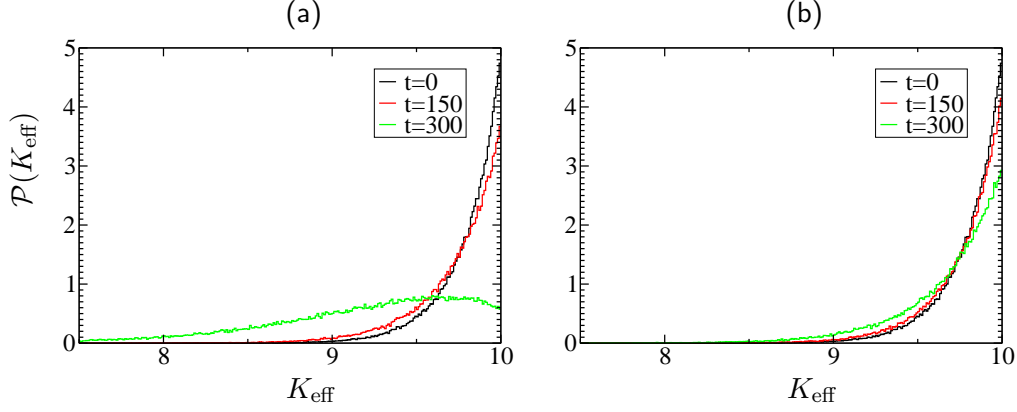
## B.2 Inhomogénéité de $K$

Un autre effet dont il faut tenir compte est la position transverse des atomes dans les faisceaux formant l'onde stationnaire. Bien que la taille spatiale de faisceau (de largeur à mi hauteur  $w_0 = 1.5\text{mm}$  en intensité) soit grande devant la taille du nuage d'atomes froids initial (voir figure 4.4), la variation du coefficient de stochasticité  $K$  suivant la distribution spatiale des atomes doit être prise en compte, en particulier du fait que les atomes se meuvent transversalement. Ainsi, les atomes perçoivent un coefficient de stochasticité effectif  $K_{\text{eff}} = K \exp[-(y(t)^2 + z(t)^2) \ln(2)/w_0^2]$ , où les coordonnées transverses  $y$  et  $z$  sont données par :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{y0}t \\ z(t) &= z_0 + v_{z0}t - gt^2/2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ces équation décrivent le mouvement transverse des atomes, et notamment la chute des atomes suivant la direction verticale du fait de l'attraction gravitationnelle (l'onde stationnaire est horizontale). Chaque particule est associée à des positions initiales transverses  $y_0$  et  $z_0$  suivant une distribution Gaussienne de largeur  $\sigma_R \approx 0.15\text{mm}$  qui correspond au nuage d'atomes froids (voir section A.1 de ce chapitre), et des vitesses initiales transverses  $v_{y0}$  et  $v_{z0}$  qui correspondent à la distribution en impulsion initiale  $P(l, t=0)$  (voir figure 4.2), i.e. une distribution Gaussienne de largeur  $\sigma_V \approx 2 \times (2\hbar k_L)/M \approx 14\text{mm/s}$ .

L'inhomogénéité “statique” du paramètre de stochasticité  $K_{\text{eff}}$  ne pose pas un problème majeur quant à l'observation de la localisation dynamique. La variation de  $K_{\text{eff}}$  suivant la distribution initiale spatiale du nuage est en effet très faible, de l'ordre de 2% (voir figure 4.11 (a)). Supposons que l'on conserve toujours cette même distribution initiale de  $K_{\text{eff}}$  à mesure que le temps passe (courbe noire de la figure 4.11 (a)). Les quantités de transport mesurées, telles que la distribution en impulsion finale, sont de fait moyennées sur cette distribution en  $K_{\text{eff}}$ . Mais, ceci n'est pas gênant puisque cette distribution est très étroite.



**Fig. 4.11:** Inhomogénéité de  $K$  due à la distribution spatiale transverse des atomes dans l'onde stationnaire. (a) Chaque particule est associée à des positions transverses  $y(t)$  et  $z(t)$  données par (4.10) et ressent un coefficient de stochasticité  $K_{\text{eff}}$ . La distribution de  $K_{\text{eff}}$  est représentée à différents temps  $t = 0$  kick (distribution initiale),  $t = 150$  kicks et  $t = 300$  kicks. Les effets d'inhomogénéité et de dynamique transverse des atomes sont négligeables pour  $t = 150$  kicks, mais empêchent l'observation de la localisation dynamique au delà de ce temps. (b) Cas où l'onde stationnaire serait placée en configuration verticale et accompagne le mouvement de chute libre des atomes. Il serait alors possible de prolonger l'expérience jusqu'à  $\approx 500$  kicks. Les positions transverses  $y(t)$  et  $z(t)$  sont ici données par (4.10) avec  $g = 0$ .

Par exemple, ceci revient à moyenner des distributions localisées exponentiellement avec des longueurs de localisation  $\ell \approx K_{\text{eff}}^2/4k^2$  qui diffèrent très peu les unes des autres (la variation typique de la longueur de localisation est de  $\approx 4\%$ ).

En revanche, la dépendance temporelle de  $K_{\text{eff}}$ , due à la distribution initiale de vitesse et à la chute des atomes suivant la direction verticale, est beaucoup plus contraignante : elle implique, à temps suffisamment long, un effet de délocalisation [110]. Ceci se comprend bien si l'on considère l'évolution temporelle d'un quasi-état propre associé à l'opérateur  $\hat{U}_{K_{\text{eff}}(t=0)}$  avec  $K_{\text{eff}}(t=0)$ , sous l'effet d'une variation temporelle de  $K_{\text{eff}}(t)$ . Si  $K_{\text{eff}}(t)$  varie lentement, ce quasi-état évolue de façon adiabatique, i.e. reste un quasi-état propre associé à  $\hat{U}_{K_{\text{eff}}(t)}$ . En revanche, si la variation de  $K_{\text{eff}}(t)$  est trop brutale, le quasi-état initial se superpose sur l'ensemble des quasi-états propres de  $\hat{U}_{K_{\text{eff}}(t)}$ , donnant lieu à une dynamique diffusive (voir [111]). Dans ce cas, la localisation dynamique est brisée. Dans le cas expérimental, à  $t = 150$  kicks, cet effet de délocalisation est négligeable : la distribution en  $K_{\text{eff}}$  à  $t = 150$  kicks est en effet très voisine de celle initiale (voir figure 4.11 (a)). En revanche, au delà de ce temps, la variation temporelle de  $K_{\text{eff}}$  se fait sentir (voir la distribution de  $K_{\text{eff}}$  à  $t = 300$  kicks) et l'observation de la localisation dynamique est impossible.

Une manière de retarder cet effet de délocalisation serait de placer l'onde stationnaire en configuration verticale tout en l'accélérant avec les atomes. L'accélération de l'onde est réalisable via un déphasage des faisceaux lasers constituant l'onde stationnaire d'une quantité variant quadratiquement avec le temps [112]. Dans ce cas, on se débarrasse du terme de chute dans l'équation (4.10), et la distribution de  $K_{\text{eff}}(t)$  varie moins vite en fonction du temps (voir figure 4.11 (b)). Néanmoins, on ne fait que retarder le problème de délocalisation à des temps  $t \approx 500$  kicks.

## C Sources de décohérence

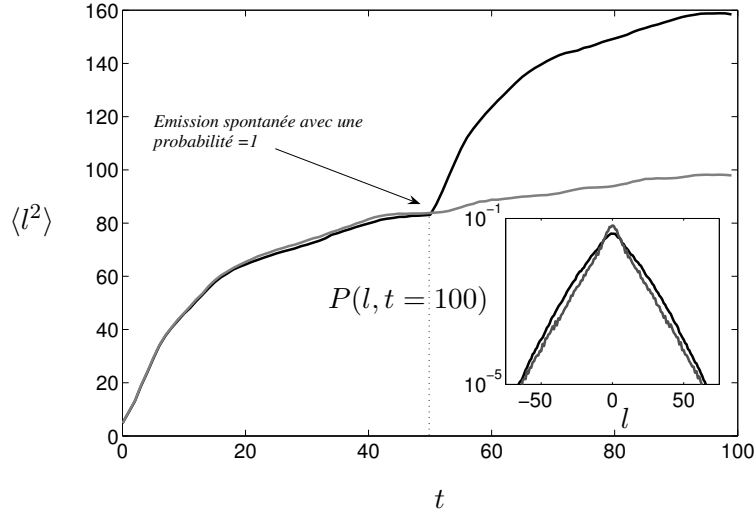
Toute expérience de transport quantique doit examiner les possibles sources de décohérence qui détruisent les effets d'interférence quantique (dans notre cas, la localisation) et rétablissent une dynamique diffusive. Les sources les plus importantes de décohérence dans notre expérience sont (i) les collisions atomiques, (ii) l'émission spontanée, et (iii) la déviation de l'onde stationnaire à la stricte horizontalité.

Pour système isolé décrit par une unique fonction d'onde, la cohérence de phase entre les différentes positions est "parfaite". Lorsque le système est faiblement couplé à un bain, il ne peut plus être décrit par une seule fonction d'onde, la description la plus pratique implique généralement une matrice densité  $\hat{\rho}$ . Des éléments de matrice non-diagonaux du type  $\langle x|\hat{\rho}|x'\rangle$  quantifient le degré de cohérence du système entre les positions  $x$  et  $x'$ . En règle générale, l'effet du bain extérieur est de faire décroître les éléments non-diagonaux de la matrice densité relativement rapidement, plus rapidement que éléments diagonaux : il s'agit de la décohérence [113] (à ne pas confondre avec le phénomène de dissipation). Les effets de localisation d'Anderson sont dus à de subtils effets interférentiels, entre les différentes composantes de la fonction d'onde, qui inhibent le transport classique autorisé : ils sont donc très sensibles à la décohérence. Une façon générale de quantifier la force des effets de décohérence est de définir un temps de cohérence de phase, le temps caractéristique de décroissance des éléments non-diagonaux de la matrice densité du fait du couplage avec un bain extérieur. Dans notre cas, les éléments non-diagonaux dignes d'intérêt sont ceux entre les états  $|p\rangle$  and  $|p'\rangle$  situés à une distance typique  $|p - p'|$  comparable à la longueur de localisation  $p_\ell$  dans l'espace des impulsions.

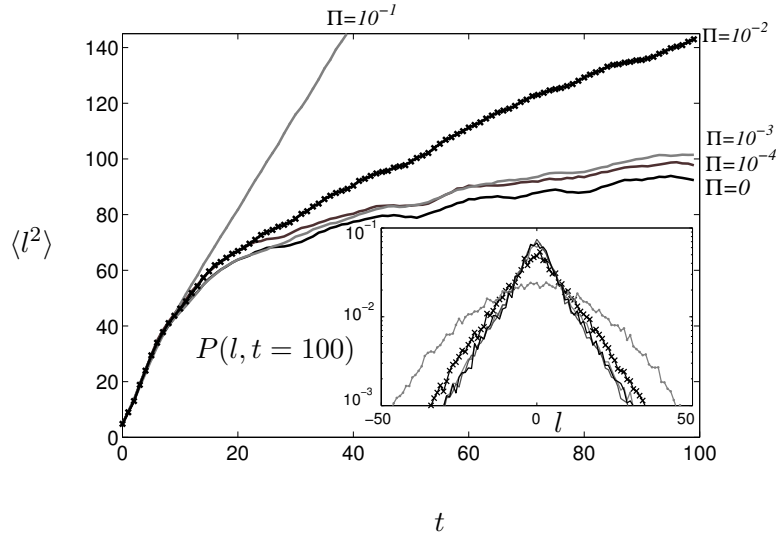
Les effets de localisation ne peuvent être observés qu'à des temps plus courts que le temps de cohérence de phase [18]. Au-delà de ce temps de cohérence de phase, les effets d'interférence ont été tués et une dynamique diffusive (similaire à la dynamique classique) prend place. Dans la suite, nous allons exprimer le temps caractéristique associé aux processus de décohérence (i), (ii) et (iii) en fonction des paramètres expérimentaux, ceci afin de montrer qu'ils peuvent être réglés suffisamment longs pour que les effets de localisation soient observables.

### C.1 Collisions atomiques

Dans les collisions inter-atomiques, l'effet dominant est celui des collisions entre atomes froids, la densité du nuage étant d'environ huit ordres de grandeur plus grande que la densité du gaz chaud environnant. Un nuage de densité de  $10^{12}\text{cm}^{-3}$ , avec une moyenne de vitesse de  $1\text{cm/s}$  et d'une section efficace de collision  $6 \times 10^{-11}\text{cm}^2$  donne un taux de collision de  $\approx 60\text{s}^{-1}$ , soit  $1,6 \times 10^{-3}$  par kick : le temps de cohérence de collision est donc de  $\sim 600$  kicks.



**Fig. 4.12:** Effet d'un événement d'émission spontanée à  $t = 50$  kicks sur l'évolution temporelle de la variance de  $l$ ,  $\langle l^2 \rangle$ , pour le Kicked Rotor, telle que simulée numériquement pour  $K = 10$  et  $\hbar = 3.46$  (représentée en noir, l'évolution sans émission spontanée étant représentée en gris clair). L'encart représente les distributions en impulsion à  $t = 100$  correspondantes.



**Fig. 4.13:** Dépendance de l'évolution temporelle de la variance de  $l$ ,  $\langle l^2 \rangle$ , en fonction du taux d'émission spontanée par kick,  $\Pi$ , telle que simulée numériquement pour le Kicked Rotor avec  $K = 10$ ,  $\hbar = 3.46$  et  $\Pi = 0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  et  $10^{-1}$ . L'évolution temporelle est ici moyennée sur le processus aléatoire d'émission spontanée, alors que l'évolution représentée en figure 4.12 est une réalisation fixée d'émission spontanée. L'encart représente les distributions en impulsion à  $t = 100$  correspondantes. Tant que  $t \ll \tau_\varphi = 1/\Pi$ , la localisation dynamique est observée (ici, pour  $\Pi = 0, 10^{-4}$  et  $10^{-3}$ ) : les distributions en impulsion sont quasi-indiscernables. Mais à temps suffisamment long, i.e. dès lors que  $t \gg \tau_\varphi = 1/\Pi$ , la dynamique est de type diffusive (clairement visible ici pour  $\Pi = 10^{-1}$ ).

## C.2 Émission spontanée

Afin d'avoir une meilleure idée de l'effet de décohérence induit par l'émission spontanée, considérons l'évolution temporelle d'une fonction d'onde initialement plane :  $\psi(p, t = 0) = \delta(p - p_0)$  suivant l'Hamiltonien du Kicked Rotor (3.8). Comme expliqué en section C du chapitre 3, cet état initial peut être décomposé suivant les états de Floquet localisés suffisamment proches de l'impulsion initiale  $p_0$ . La première phase d'expansion diffusive de la distribution correspond à un déphasage progressif de ces états de Floquet, et, lorsque les phases sont brouillées, la dynamique de la distribution est gelée. L'émission spontanée, qui apporte un recul aléatoire à l'impulsion de l'atome, redistribue la fonction d'onde atomique sur une nouvelle série d'états de Floquet, et un nouveau comportement transitoire diffusif suit pour une autre durée de  $t_\ell$  (voir figure 4.12). Dans ce processus, des états de Floquet localisés plus loin de  $p_0$  peuvent être peuplés : la localisation dynamique devrait donc être détruite si l'émission spontanée est régulièrement répétée (voir figure 4.13). Il faut noter qu'un seul événement d'émission spontanée brise entièrement la cohérence de phase, ce qui implique que le temps de cohérence de phase est tout simplement l'inverse du taux d'émission spontanée.

L'émission spontanée tend à rétablir une évolution diffusive avec une constante de diffusion qui est à peu près  $\Pi \hbar^2$  où  $\Pi = \Gamma \Omega^2 \tau / 8 \Delta_L^2$ , est le taux d'émission spontanée exprimé en photons par kick, qui peut être exprimé sous la forme  $\Pi = (\Gamma \tau / 8) (I / I_s) (\Gamma / \Delta_L)^2$ , où  $I$  est l'intensité et  $I_s \approx 2.2 \text{ mW / cm}^2$  est l'intensité de saturation de la transition. Pour  $K \approx 6$  (voisinage de la transition d'Anderson, voir chapitre suivant), les valeurs expérimentales indiquées ci-dessus donnent  $\Pi \approx 2.1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , i.e. un temps de cohérence de phase  $\sim 500$  kicks.

## C.3 Inclinaison de l'onde stationnaire

Un autre effet conduisant à la destruction de la localisation est dû à la déviation de l'onde stationnaire par rapport à l'horizontalité. Dans ce cas, un terme de gravité doit être ajouté dans l'Hamiltonien (3.8) :

$$H_g = \frac{p^2}{2} - \eta_g x + K \cos x \sum_n \delta(t - n) , \quad (4.11)$$

Le terme de gravité  $\eta_g$ , en unités adimensionnées [voir équation (3.3)], est :

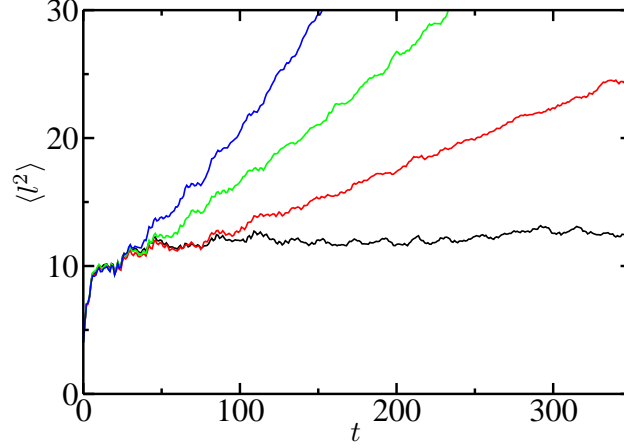
$$\eta_g = \frac{mgT_1 \sin \alpha}{2\hbar k_L} k , \quad (4.12)$$

avec  $g$  l'accélération gravitationnelle et  $\alpha$  l'angle entre la direction horizontale et l'onde stationnaire. L'interprétation physique est tout à fait claire :  $mgT_1 \sin \alpha$  est l'impulsion supplémentaire transférée aux atomes entre deux kicks, qui doit être comparée à la largeur de la zone de Brillouin  $2\hbar k_L$ .

Nous allons exprimer la dynamique de ce Kicked Rotor incliné dans le référentiel associé à la chute libre (référentiel accéléré). Il peut être démontré [112] qu'elle est décrite par l'Hamiltonien suivant :

$$H'_g = \frac{p^2}{2} + K \cos(x + \eta_g t^2 / 2) \sum_n \delta(t - n) . \quad (4.13)$$





**Fig. 4.14:** Effet de la gravité sur un Kicked Rotor légèrement incliné, Eq. (4.11). L'écart de l'onde stationnaire à l'horizontalité est de  $\alpha = 0^\circ$  (courbe noire),  $\alpha = 0.1^\circ$  (courbe rouge),  $\alpha = 0.4^\circ$  (courbe verte) et  $\alpha = 1^\circ$  (courbe bleue). Le paramètre de stochasticité est pris égal à  $K = 5$  et la constante de Planck effective est  $\hbar = 2.85$ . La dynamique d'un état initial thermique (correspondant à l'état initial expérimental) est simulée et la variance de  $l$ ,  $\langle l^2 \rangle$ , correspondante est tracée en fonction du temps. Pour les angles de plus de  $0.1^\circ$ , la lente dérive des impulsions induit un comportement diffusif clairement visible sur l'échelle de temps de l'expérience.

À moins que  $\eta_g$  vérifie la stricte condition de résonance (c'est-à-dire être rationnelle avec  $2\pi$ ), la séquence  $\eta_g t^2/2 \bmod[2\pi]$  est pseudo-aléatoire [88,89] aux temps suffisamment longs  $t \gg \tau_g$  où  $\tau_g$  est tel que :

$$\eta_g \tau_g^2/2 \approx 2\pi. \quad (4.14)$$

Lorsque  $\eta_g t^2/2 \bmod[2\pi]$  est pseudo-aléatoire, il peut être interprété comme un terme de bruit de phase aléatoire  $\gamma(t)$  dans le potentiel  $K \cos(x + \gamma(t))$ . La présence d'un tel bruit est connue pour conduire à un comportement diffusif [114,115].  $\tau_g$  peut donc être interprété comme un “temps de cohérence de phase” (où nous mettons des guillemets pour souligner la nature essentiellement déterministe du phénomène de délocalisation mis en jeu dans ce processus) : pour  $t \ll \tau_g$ , la dynamique n'est essentiellement pas affectée par la “décohérence gravitationnelle”.

Les simulations numériques prenant en compte l'effet de la gravité confirment la discussion ci-dessus (voir figure 4.14). Par analogie avec le phénomène d'émission spontanée, nous mesurons  $\tau_g$  comme le temps au bout duquel  $\langle l^2 \rangle$  vaut deux fois sa valeur asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) en l'absence de décohérence (voir figure 4.12). Si l'onde stationnaire s'écarte de l'horizontalité d'un angle  $\alpha = 1^\circ$ , alors  $\tau_g \approx 120$  kicks alors que lorsque l'angle  $\alpha = 0.1^\circ$ ,  $\tau_g \approx 350$  kicks.

Dans l'échelle de temps de l'expérience (150 kicks), l'écart à l'horizontalité doit être de moins de  $0.1^\circ$ . Cet effet de “décohérence” est assez important. À notre connaissance, son importance n'a pas été pleinement appréciée dans les précédentes études expérimentales.

## D Conditions pour l'observation des effets de localisation

Nous allons maintenant récapituler les conditions qui doivent être respectées afin d'observer les effets de localisation expérimentalement.

Tout d'abord, le système doit présenter une certaine forme de désordre : comme nous l'avons dans la section D du chapitre 3, cela signifie que l'on doit se placer loin des résonances quantiques simples, ce qui est vrai si  $\hbar k$  est un multiple irrationnel de  $\pi$ . Ce résultat est obtenu si l'on prend  $\hbar k = 2.89$  par exemple.

Deuxièmement, afin d'observer des effets de localisation quantique (dus aux effets interférentiels) et non pas des effets triviaux de localisation classique, nous devons être dans un régime où le système classique n'a pas de barrières de KAM qui peuvent empêcher le transport classique diffusif. Pour le Kicked Rotor atomique, le dernier tore de KAM disparaît pour  $K \gtrsim 1$ , et la dynamique est complètement chaotique pour  $K \geq 4$  (voir section A.1 du chapitre 3). Les expériences et les simulations numériques présentées dans cette thèse sont toutes effectuées dans le domaine  $K \geq 4$  où la dynamique classique est diffusive.

Troisièmement, l'état initial doit être suffisamment étroit en comparaison de la longueur de localisation. C'est seulement dans ce cas que l'on peut observer le phénomène de localisation dynamique, c'est-à-dire le gel de l'expansion diffusive initiale de la fonction d'onde dans un état exponentiellement localisé (voir section C du chapitre 3). Ainsi, du fait que la largeur de la distribution initiale en impulsion est  $\sigma_l \approx 2$  (voir figure 4.2), l'on doit travailler dans le régime  $K \gtrsim 5$  (nous verrons dans le chapitre suivant que cette condition est moins stricte dans le cas du Kicked Rotor quasi-périodique).

Quatrièmement, des kicks suffisamment courts doivent être utilisés, de sorte que les effets de taille finie qu'ils impliquent soient négligeables (voir section B.1 de ce chapitre). Cette condition est vérifiée dès lors que  $\alpha = \tau/T_1 \lesssim 0.03$  (compte tenu des limites expérimentales en nombre de kicks et en intensité laser).

Cinquièmement, l'étude de la dynamique temporelle doit être restreinte à des temps  $t \lesssim 150$  kicks du fait du mouvement des atomes suivant la direction transverse à l'onde stationnaire, notamment la chute des atomes suivant la direction verticale (voir section B.2 de ce chapitre).

Enfin, les processus de décohérence doivent être limités dans la durée de l'expérience. Le désaccord de l'onde stationnaire doit être réglé de façon à ce que le temps de cohérence de phase (l'inverse du taux d'émission spontanée) soit grand devant la durée de l'expérience ( $t \approx 150$  kicks). Ceci est vérifié pour un désaccord de 7.3 GHz vers le rouge, où le temps de cohérence de phase à  $K = 6$  est de  $t = 500$  kicks. Un bon contrôle de l'horizontalité de l'onde stationnaire doit être également assuré afin que la gravité ne conduise pas à une destruction des effets de localisation sur l'échelle de temps de l'expérience ( $t \leq 150$  kicks). Lorsque l'inclinaison est moindre que  $0.1^\circ$ , les effets de délocalisation gravitationnelle sont négligeables.



---

# Transition d'Anderson avec le Kicked Rotor quasi-périodique : théorie d'échelle et observation expérimentale

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Modèles simples de systèmes désordonnés . . . . .</b>	<b>13</b>
A.1	Modèle de désordre structurel . . . . .	13
A.2	Modèle d'Anderson . . . . .	14
<b>B</b>	<b>Différentes caractérisations de la localisation . . . . .</b>	<b>16</b>
B.1	Comportement asymptotique des états propres . . . . .	16
B.2	Probabilité de diffusion quantique . . . . .	17
B.3	Conductance . . . . .	18
B.4	Exposant de Lyapunov . . . . .	19
<b>C</b>	<b>Théories de la localisation . . . . .</b>	<b>21</b>
C.1	Théorie auto-cohérente . . . . .	21
C.2	Théorie d'échelle . . . . .	26
<b>D</b>	<b>Études expérimentales de la transition d'Anderson . . . . .</b>	<b>37</b>
D.1	Longueur de cohérence de phase . . . . .	37
D.2	Observation de la transition métal-isolant dans les solides désor- donnés . . . . .	38
D.3	Observation de la transition d'Anderson avec des ondes classiques	39

---

LA transition métal-isolant d'Anderson n'existe qu'à partir d'une certaine dimension inférieure. Dans le cas d'un système invariant par renversement du temps, cette dimension inférieure est  $d = 2$ . Considérant ce cas, il nous faut, pour observer la transition d'Anderson, généraliser le Kicked Rotor périodique atomique, système pseudo-désordonné 1D, de façon à obtenir un système pseudo-désordonné 3D. Dans ce chapitre, le plus important de cette thèse, nous présentons un tel système, le Kicked Rotor quasi-périodique, expliquons pourquoi il est équivalent à un modèle d'Anderson 3D,

et montrons comment observer la transition d'Anderson en modifiant très simplement le dispositif expérimental précédemment décrit (voir chapitre 4). En particulier, nous présentons une théorie d'échelle de la transition permettant de dépasser les obstacles posés par les limitations expérimentales.

Ces travaux ont permis la *première observation expérimentale de la transition d'Anderson en dimension trois avec des ondes de matière atomique, et la première mesure expérimentale de l'exposant critique  $\nu$  de la transition* : voir notre article [37] (reproduit en section D de ce chapitre), écrit en collaboration avec l'équipe expérimentale de J.-C. Garreau et P. Szriftgiser du laboratoire PHLAM à Lille et reproduit dans ce chapitre. Les résultats expérimentaux, obtenus sous les contraintes décrites au chapitre 4, sont pleinement compatibles avec les résultats de simulations numériques du cas idéal, i.e. sans imperfections ni décohérence. Ceci montre que les limitations expérimentales sont sous contrôle. Les résultats expérimentaux corroborent également les études numériques précédemment effectuées de la transition d'Anderson à partir du véritable modèle d'Anderson 3D. Ceci est particulièrement intéressant vu le désaccord entre les prédictions théoriques pour l'exposant critique  $\nu = 1$  (voir section C.1.2 du chapitre 2 et [44]) et les mesures numériques  $\nu \approx 1.57$  [12].

L'ensemble de cette étude est décrit de façon détaillée dans un article accepté à *Physical Review A* et que nous reproduisons ici dans son intégralité (voir section E de ce chapitre). Auparavant, nous discutons, de façon moins technique et plus imagée, les idées physiques fondamentales à la base de ce travail. Nous insistons en premier lieu sur les arguments soutenant l'équivalence entre le système considéré et le modèle d'Anderson 3D. Ensuite, nous montrons comment se traduisent les limitations de durée de l'expérience sur les observations de la transition métal-isolant. Nous introduisons finalement la théorie d'échelle en temps ("finite-time scaling") permettant de dépasser ces limitations, en montrant son analogie avec la théorie d'échelle en taille d'échantillon, très utile dans le cas des études numériques du véritable modèle d'Anderson 3D, par exemple.

## A Le Kicked Rotor quasi-périodique et sa relation avec le modèle d'Anderson 3D

Différentes généralisations du Kicked Rotor périodique ont été considérées sur les plans théoriques et numériques comme analogues de modèles d'Anderson de dimensions supérieures [35, 116–119].

### A.1 Le Kicked Rotor périodique 3D

Une extension naturelle du Kicked Rotor périodique est le Kicked Rotor périodique de dimension  $d$  suivant [116, 117] :

$$H = \sum_{i=1}^d \omega_i \frac{\hat{p}_i^2}{2} + K \cos \hat{\theta}_i \sum_n \delta(t - n) . \quad (5.1)$$

Ce système est formellement équivalent à un modèle d'Anderson de dimension  $d$  (cf. section B du chapitre 3) :

$$\boxed{\mathcal{V}_l a_l + \sum_{l' \neq 0} t_{l'} a_{l-l'} = -t_0 a_l} . \quad (5.2)$$

où  $l$  sont les coordonnées de sites d'un réseau de dimension  $d$  correspondant aux impulsions via  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{l}$ . Lorsque les différents  $\omega_i$  sont incommensurables entre eux et avec  $\pi/\hbar$ , les énergies sur site :

$$\mathcal{V}_l = \tan \left[ \frac{1}{2} \left( \omega - \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^d \omega_i l_i^2 \right) \right] , \quad (5.3)$$

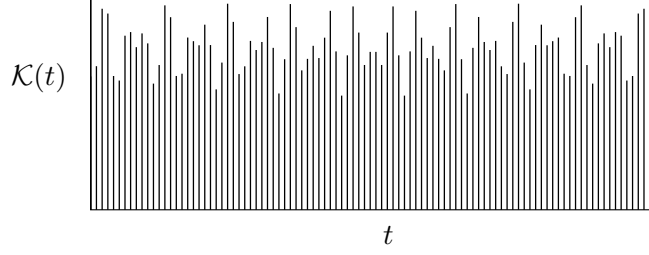
sont distribuées de façon pseudo-aléatoire suivant une Lorentzienne. Les amplitudes de transition  $t_{l'}$  ne sont pas restreintes aux premiers voisins, mais décroissent exponentiellement avec  $|l'|$ . Elles augmentent, en outre, en fonction du ratio  $K/\hbar$ , si bien que  $K/\hbar$  joue le rôle d'un paramètre de désordre, la limite de faible désordre correspondant à  $K/\hbar \gg 1$ .

Les études menées sur les propriétés de transport quantique dans le Kicked Rotor périodique de dimension  $d$  ont eu des résultats parfaitement conformes aux prédictions de la théorie de la localisation pour les systèmes invariants par renversement du temps (voir section C du chapitre 2) :

- En dimension deux, la localisation dynamique a lieu quelque soit la valeur du paramètre de stochasticité  $K$ , et la longueur de localisation augmente exponentiellement avec  $K/\hbar$  [116].
- En dimension trois, le système opère une transition isolant-métal d'Anderson dès lors que le paramètre  $K$  dépasse une valeur critique  $K_c$  [117]. Ainsi, ce n'est qu'à partir de la dimension trois qu'a lieu la transition d'Anderson. En outre, au régime critique de la transition, la distribution statistique des niveaux est invariante d'échelle et la diffusion quantique est anormale avec exposant  $2/3$  :  $\langle l^2 \rangle \sim t^{2/3}$ , comme prédit par la théorie d'échelle à un paramètre (voir la suite de ce chapitre).

Néanmoins, ce système présente des inconvénients majeurs quant à l'étude des caractéristiques de la transition d'Anderson :

- Les études numériques sur le Kicked Rotor périodique en dimension trois sont soumises à des effets de taille finie très contraignants. Ainsi, la caractérisation de la statistique des niveaux de quasi-énergie de l'opérateur d'évolution sur une période associé à l'Hamiltonien (5.1) n'a pu être menée que pour des tailles d'échantillon  $L$  ( $l_i = 1, \dots, L$ ) petites,  $L \leq 32$ , du fait des limitations en temps de calcul (voir l'étude *très récente* rapportée dans [117]). La "lourdeur" de ces simulations numériques empêche, entre autres, une étude fine des différentes dynamiques (localisée, diffusive et critique) et la démonstration du caractère universel des propriétés critiques de la transition. De manière générale, les difficultés rencontrées sont plus importantes que celles rencontrées dans les études du modèle d'Anderson 3D. Pire au sens où les amplitudes de transition  $t_{l'}$  ne sont pas restreintes aux plus proches voisins, ceci aggravant les effets de taille finie, et également au sens où le caractère pseudo-aléatoire du désordre empêche une moyenne simple sur les configurations du désordre.
- Il n'y a pas eu, à ce jour, de réalisation expérimentale d'un Kicked Rotor périodique de dimension supérieure à un. Ceci est le principal inconvénient qui nous a conduit à considérer un autre type de Kicked Rotor, également analogue à un modèle d'Anderson



**Fig. 5.1:** Représentation imagée de la modulation quasi-périodique de l'amplitude des kicks d'onde stationnaire suivant l'équation (5.5).

3D, mais facilement réalisable expérimentalement en modifiant simplement le dispositif présenté au chapitre précédent. Ce système est le Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences que nous allons maintenant présenter.

## A.2 Le Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences

Le système que nous considérons, à partir de maintenant, est une généralisation à trois fréquences du Kicked Rotor périodique (1D) [35, 118] :

$$H_{\text{qp}} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \mathcal{K}(t) \cos \hat{\theta} \sum_n \delta(t - n), \quad (5.4)$$

simplement obtenue par la modulation de l'amplitude des kicks d'onde stationnaire avec un ensemble de deux nouvelles fréquences  $\omega_2$  et  $\omega_3$  de modulation :

$$\mathcal{K}(t) = K [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \cos(\omega_3 t + \varphi_3)]. \quad (5.5)$$

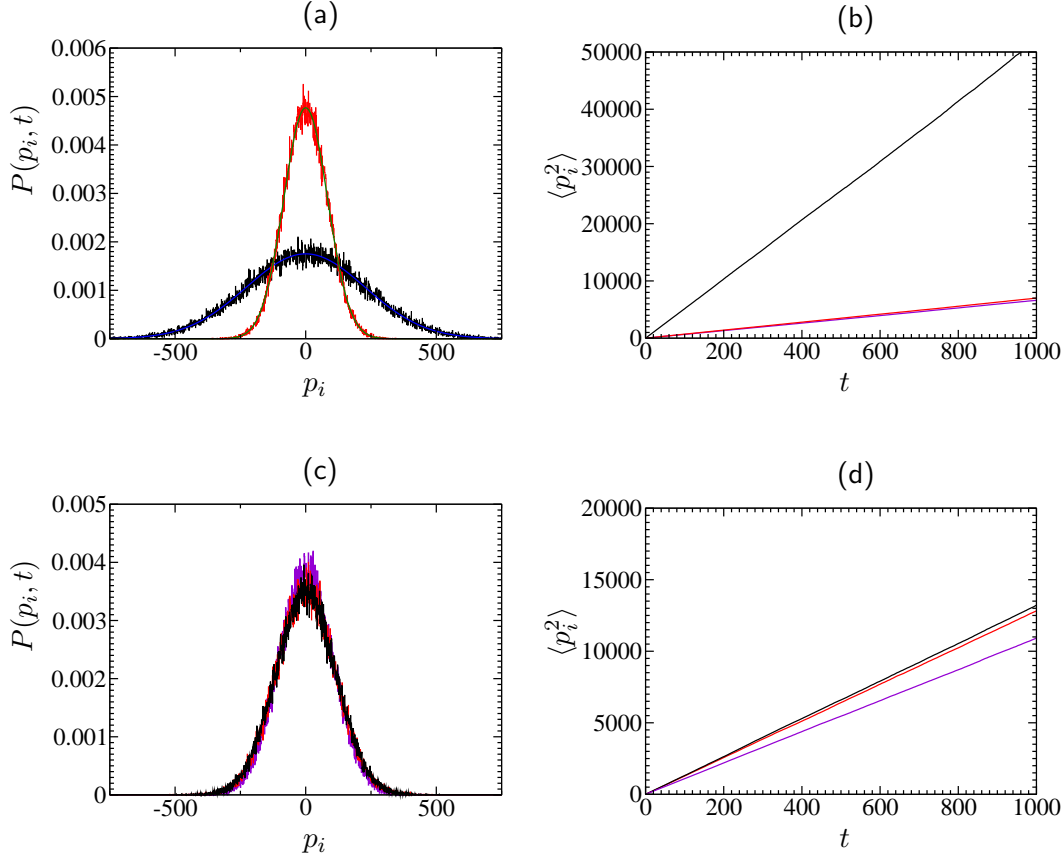
Comme démontré dans notre article [120] (reproduit en section E de ce chapitre), la dynamique de ce Kicked Rotor quasi-périodique (5.4) est *exactement identique* à l'évolution temporelle du Kicked "Rotor" périodique 3D suivant :

$$H_3 = \frac{p_1^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + K \cos \theta_1 [1 + \varepsilon \cos \theta_2 \cos \theta_3] \sum_n \delta(t - n), \quad (5.6)$$

ayant pour condition initiale une "source plane" (voir figure 5.4) :

$$\psi_3(\boldsymbol{\theta}, t = 0) = \psi_{\text{qp}}(\theta_1, t = 0) \delta(\theta_2 - \varphi_2) \delta(\theta_3 - \varphi_3), \quad (5.7)$$

où  $\psi_{\text{qp}}(\theta, t = 0)$  est une condition initiale arbitraire pour le Kicked Rotor quasi-périodique (5.4). Il faut ici noter : (i) la dépendance inhabituelle de l'énergie cinétique de l'Hamiltonien  $H_3$  (5.6), linéaire en  $p_2$  et  $p_3$  (c'est pourquoi nous avons mis des guillemets au "Rotor"), (ii) ainsi que la forme très particulière de l'état initial  $\psi_3$  (5.7) entièrement délocalisé suivant les impulsions  $p_2$  et  $p_3$ . Nous allons commenter ces deux points très importants.



**Fig. 5.2:** Dynamiques classiques diffusives des Kicked “Rotor” périodique 3D anisotrope décrit par l’équation (5.6) [sous-figures (a) et (b)] et isotrope décrit par l’équation (5.9) [sous-figures (c) et (d)]. Les états initiaux sont choisis piqués autour de l’origine  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  et uniformément distribués sur  $[0, 2\pi)^3$  pour la variable angulaire,  $\theta \in [0, 2, \pi)^3$ . Après 1000 kicks, les distributions en impulsion classiques (courbes noire et rouges bruitées en (a) et également courbe violette en (c)) ont une forme Gaussienne caractéristique d’un mouvement diffusif. En (a), les courbes bleue et verte sont des ajustement par des gaussiennes qui ne montrent aucune déviation statistique significative. La courbe noire (rouge, violette, respectivement) est la distribution en impulsion suivant la direction  $p_1$  ( $p_2$ ,  $p_3$  respectivement). En (a), la distribution suivant  $p_3$  est identique, ou presque, que celle suivant  $p_2$  et n’est pas représentée, pour plus de clarté. La diffusion est anisotrope du fait que les amplitudes de transition dans les directions transverses “2” et “3” sont diminuées d’un facteur  $\approx \varepsilon$  par rapport aux amplitudes de transition le long de la direction “1”. En (b) et (d), les variances de ces distributions sont représentées en fonction du temps (en nombre de kicks), avec les couleurs correspondantes. Les paramètres sont  $K = 10$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\omega_2/2\pi = \sqrt{5}$  et  $\omega_3/2\pi = \sqrt{13}$ .



### A.2.1 Énergie cinétique transverse linéaire et dynamique diffusive

La dépendance linéaire non-usuelle en  $p_2$  et  $p_3$  de l'Hamiltonien (5.6) n'empêche pas, pour  $\varepsilon \neq 0$ , la dynamique classique de ce système d'être diffusive suivant toutes les directions [voir figure 5.2 (a) et (b)]. Cette marche pseudo-aléatoire classique dans l'espace des impulsions  $\mathbf{p}$  atteste du caractère pseudo-désordonné de ce système. La diffusion est anisotrope du fait que les amplitudes de transition dans les directions transverses "2" et "3" sont diminuées d'un facteur  $\approx \varepsilon$  par rapport aux amplitudes de transition le long de la direction "1". Ceci est particulièrement manifeste si l'on considère l'équivalent de l'Application Standard (3.11) pour ce Kicked "Rotor" 3D (5.6), reliant les valeurs de  $(\theta_n, \mathbf{p}_n)$  des vecteurs angle et impulsion juste après le  $n^{\text{ième}}$  kick à celles  $(\theta_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})$  une période après :

$$\begin{aligned} p_{1_{n+1}} &= p_{1_n} + K \sin \theta_{1_n} (1 + \varepsilon \cos \theta_{2_n} \cos \theta_{3_n}) , \\ p_{2_{n+1}} &= p_{2_n} + K \varepsilon \cos \theta_{1_n} \sin \theta_{2_n} \cos \theta_{3_n} , \\ p_{3_{n+1}} &= p_{3_n} + K \varepsilon \cos \theta_{1_n} \cos \theta_{2_n} \sin \theta_{3_n} , \\ \theta_{1_{n+1}} &= \theta_{1_n} + p_{1_{n+1}} , \\ \theta_{2_{n+1}} &= \theta_{2_n} + \omega_2 , \\ \theta_{3_{n+1}} &= \theta_{3_n} + \omega_3 . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Également, la dynamique classique du pendule isotrope de l'Hamiltonien (5.6) :

$$\tilde{H}_3 = \frac{p_1^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + K \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \sum_n \delta(t - n) , \quad (5.9)$$

est associée à une dynamique classique diffusive isotrope, ou presque [voir figure 5.2 (c) et (d)]. Une analyse précise du comportement classique du système (5.6) n'a pas été effectuée. Elle n'est pas nécessaire dans la mesure où le caractère diffusif de la dynamique classique, propriété fondamentale pour la suite de notre étude, a été vérifié.

### A.2.2 Énergie cinétique transverse linéaire et modèle d'Anderson 3D

Comme dans le cas du Kicked Rotor périodique 1D, l'équation pour les états de Floquet de l'Hamiltonien du Kicked "Rotor" 3D périodique en temps, équation (5.6), peut être reformulée suivant un modèle d'Anderson 3D (voir section B.2 du chapitre 3) :

$$\mathcal{V}_l a_l + \sum_{l' \neq 0} t_{l'} a_{l-l'} = -t_0 a_l , \quad (5.10)$$

où  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  représente le site d'impulsion  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{l}$  dans un réseau 3D cubique, les énergies sur site  $\mathcal{V}_l$  sont :

$$\mathcal{V}_l = \tan \left[ \frac{1}{2} \left( \omega - \hbar \frac{l_1^2}{2} + \omega_2 l_2 + \omega_3 l_3 \right) \right] , \quad (5.11)$$

et les amplitudes de transition  $t_{l'}$  sont des coefficients d'une triple série de Fourier de :

$$t(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \tan[K \cos \theta_1 (1 + \varepsilon \cos \theta_2 \cos \theta_3) / 2\hbar] . \quad (5.12)$$

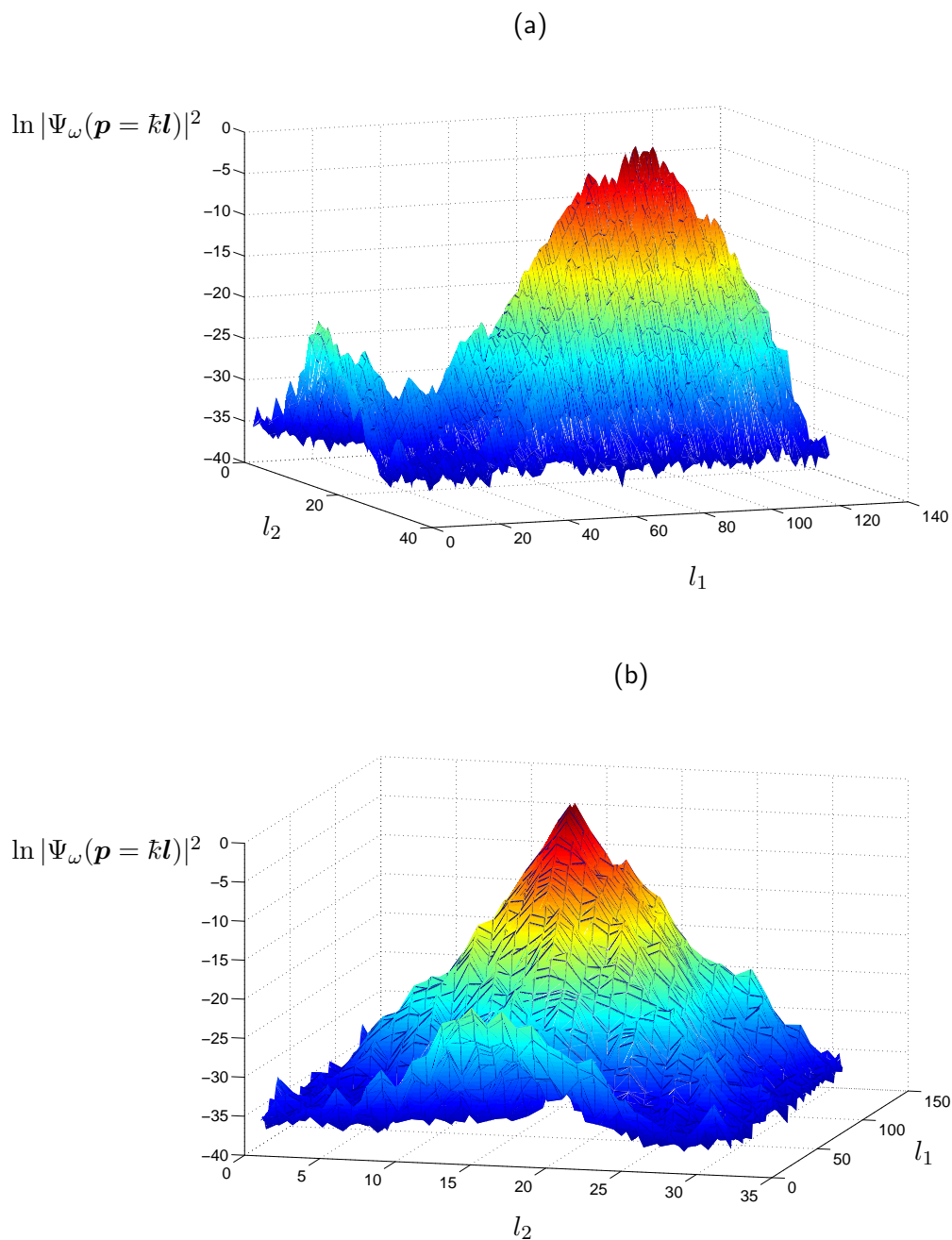
Dans le cas où  $(\vec{k}, \omega_2, \omega_3, \pi)$  est un quadruplet incommensurable, le potentiel  $\mathcal{V}_l$  est pseudo-désordonné, du fait de la dispersion non-linéaire suivant la direction  $l_1$  [35, 119]. De l’équation (5.12), il est clair que les amplitudes de transition suivant les directions “2” et “3” sont diminuées par un facteur  $\approx \varepsilon$  par rapport aux amplitudes de transition suivant la direction “1”. Ainsi, le Kicked Rotor quasi-périodique est analogue à un modèle d’Anderson 3D anisotrope [121–123]. Plus précisément, il peut être vu comme correspondant à un modèle de chaînes aléatoires couplées par des termes variant comme  $\varepsilon$  dans les deux directions transverses, modèle considéré dans [122].

Des effets de localisation, comme ceux prévus pour le modèle 3D Anderson, sont alors attendus, à savoir soit un régime diffusif, soit un régime localisé. Des états localisés sont attendus si l’amplitude du désordre est grande par rapport à l’amplitude de transition. Dans le cas du modèle (5.10), l’amplitude du désordre est fixe, mais les amplitudes de transition peuvent être contrôlées en changeant le paramètre de stochasticité  $K$  et/ou l’amplitude de modulation  $\varepsilon$  : on voit facilement que  $W(\theta)$  augmente en fonction de  $K$ ,  $\varepsilon$ . En d’autres termes, plus  $K$ ,  $\varepsilon$  augmente, plus faible est le désordre. On s’attend donc à observer un régime diffusif pour des grandes stochasticités et/ou amplitudes de modulation (faible désordre) et un régime localisé pour les petites valeurs de  $K$  et/ou de  $\varepsilon$  (grand désordre). Il convient de souligner qu’il n’y a pas *stricto sensu* de frontière de mobilité (“mobility edge”) dans notre système. Selon les valeurs des paramètres  $K, \varepsilon, \vec{k}, \omega_2, \omega_3$ , tous les états de Floquet sont localisés ou délocalisés (voir un exemple d’état localisé pour le Kicked Rotor quasi-périodique à deux fréquences représenté en figure 5.3). Le seuil de la transition métal-isolant dépend de  $K, \varepsilon, \vec{k}, \omega_2, \omega_3$ . Comme on le verra dans la suite,  $K$  et  $\varepsilon$  sont les paramètres qui comptent le plus, dans la mesure où  $(\vec{k}, \omega_2, \omega_3, \pi)$  est suffisamment incommensurable.

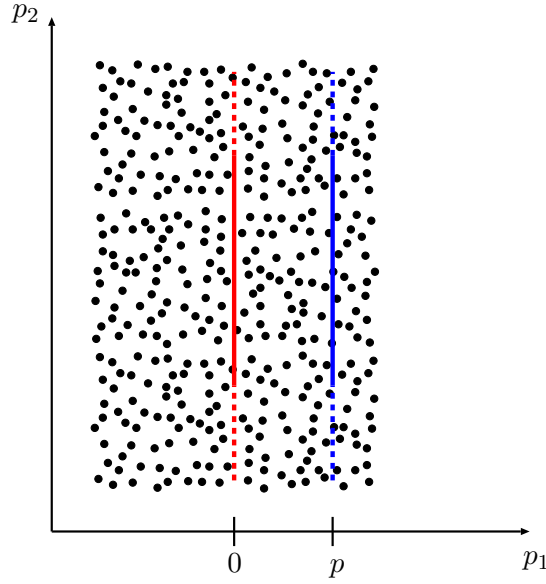
### A.2.3 Source plane

Une autre subtilité du système que nous considérons est l’état initial (5.7) qui, étant parfaitement localisé en  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , est entièrement délocalisé suivant les impulsions conjuguées  $p_2$  et  $p_3$ . L’étude du transport ne peut donc se faire que le long de la direction  $p_1$ , ce qui équivaut à mesurer la dynamique de la distribution en impulsion du Kicked Rotor quasi-périodique  $|\Psi_{qp}(p, t)|^2$ .

Comme expliqué de façon imagée en figure 5.4, notre approche du transport quantique dans le Kicked Rotor périodique 3D utilisant le Kicked Rotor quasi-périodique présente des similitudes avec les méthodes d’étude du transport d’ondes classiques dans les milieux désordonnés 3D [20, 24]. Notre expérience avec le Kicked Rotor quasi-périodique peut, en effet, être considérée comme une expérience de transport, dans un milieu désordonné 3D, d’ondes issues d’une impulsion temporelle  $\delta(t = 0)$  d’une source plane (invariante suivant les directions  $p_2$  et  $p_3$ ), où les propriétés de transport sont effectivement observées dans la direction perpendiculaire au plan émetteur. L’intérêt du Kicked Rotor quasi-périodique, de ce point de vue, réside dans le fait que le plan récepteur, mesurant l’intensité des ondes parvenant en ce plan, peut être positionné librement au sein du système désordonné, permettant de mesurer la distribution “spatiale” (l’espace considéré est en fait celui des impulsions) des intensités, et aussi que la mesure de la variation temporelle de ces inten-



**Fig. 5.3:** Deux vues (a) et (b) d'un même état de Floquet exponentiellement localisé du Kicked "Rotor" 2D [voir équation (5.6)] correspondant à un Kicked Rotor quasi-périodique à deux fréquences [voir équation (5.4)]. Nous considérons ici le cas bi-dimensionnel pour des raisons de temps de calcul : la taille de la matrice à diagonaliser est  $L_1 \times L_2$  où les tailles  $L_i$  des bases discrètes,  $l_i = 1, \dots, L_i$  doivent être choisies suffisamment grandes afin de pouvoir observer les effets de localisation. Ici  $L_1 = 128$  et  $L_2 = 32$ . L'anisotropie est clairement visible, correspondant à  $\varepsilon = 0.1$ . Les autres paramètres sont  $\hbar = 2.85$ ,  $K = 4$ ,  $\omega_2 = \sqrt{5}$ .



**Fig. 5.4:** On peut voir le Kicked Rotor périodique 3D (5.6) comme un milieu 3D dans lequel se propage une onde. Dans cette vision, l'état initial  $|\psi_{qp}(t=0)\rangle$  piqué en  $p=0$  correspond à une impulsion temporelle de Dirac  $\delta(t=0)$  d'une source plane en  $p_1=0$  (représentée en rouge), parfaitement invariante suivant les deux directions transverses  $p_2$  et  $p_3$ . La distribution en impulsion  $|\psi_{qp}(p,t)|^2$  traduit la probabilité de transmission du plan émetteur  $p_1=0$  (en rouge) au plan récepteur  $p_1=p$  (en bleu) en un temps  $t$ . Le temps d'attente  $t$  ainsi que la position  $p$  du plan récepteur peuvent être choisis librement.

sités permet de caractériser la dynamique de la localisation. Également, du point de vue numérique, un autre intérêt est que, du fait que le système est uni-dimensionnel, il est facile de considérer des tailles d'échantillon suffisamment grandes pour que les effets de taille finie soient négligeables.

#### A.2.4 Classe de symétrie du Kicked Rotor quasi-périodique

Une question d'importance fondamentale pour la suite est de savoir à quelle classe de symétrie appartient le Kicked Rotor quasi-périodique. Les propriétés de localisation, et entre autres celles de la transition d'Anderson, dépendent en effet intrinsèquement de la présence ou non de symétries anti-unitaires telles que la symétrie par renversement du temps (voir section E du chapitre 3 et [14, 99]).

Deux points de vue sont possibles permettant de discuter ce problème : (i) celui du Kicked “Rotor” périodique 3D (5.6), et (ii) celui du Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences (5.4).

D'un côté, l'Hamiltonien du Kicked “Rotor” périodique 3D (5.6) est invariant suivant la transformation anti-unitaire :

$$T_c : t \rightarrow -t, \theta \rightarrow -\theta, p \rightarrow p, \quad (5.13)$$

i.e. le renversement du temps en représentation impulsion, qui est celui pertinent dans le cas de la localisation dynamique (voir section E du chapitre 3 et [100–102]). En particulier,

un choix de valeurs non nulles pour les phases  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  ne casse pas cette symétrie. L'évolution des états suivant l'Hamiltonien (5.6) est gouvernée par l'opérateur d'évolution sur une période :

$$\mathcal{U} = e^{-iK \cos \theta_1 (1 + \varepsilon \cos \theta_2 \cos \theta_3)/\hbar} \times e^{-i(p_1^2/2 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3)/\hbar} \quad (5.14)$$

qui appartient ainsi à l'ensemble circulaire orthogonal (voir section E du chapitre 3 et [124, 125]). Et du fait que l'évolution du Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences est gouvernée par cet opérateur d'évolution, avec la condition additionnelle (5.7) à  $t = 0$ , ce système appartient à l'ensemble orthogonal.

D'un autre côté, il semble, à première vue, que l'Hamiltonien (5.4) du Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences ne soit pas symétrique par renversement du temps dès lors que les phases  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  sont non nulles. Ainsi, dans le cas de phases non nulles, le terme de modulation temporelle de l'amplitude des kicks  $\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$  n'est pas invariant suivant  $t \rightarrow -t$ . Cette apparente contradiction se résout comme suit : l'irrationalité de  $\omega_2/2\pi$  implique que  $\omega_2 t \bmod[2\pi]$  est uniformément distribué suivant  $[0, 2\pi)$ . En ce sens, les phases initiales ne jouent aucun rôle et, en particulier, ne brisent pas la symétrie par renversement du temps. Il faut noter que ce n'est pas le cas lorsque  $\omega_2/2\pi$  est un rationnel.

#### A.2.5 Autres arguments en faveur de la correspondance entre le Kicked Rotor quasi-périodique et les systèmes désordonnés 3D invariants par renversement du temps

Tous les arguments précédemment exposés tendent à montrer que le Kicked Rotor quasi-périodique à trois fréquences (5.4) est équivalent à un système désordonné 3D invariant par renversement du temps. Ceci avait déjà été suggéré par des études numériques de ce système [35, 119], nous reviendrons là-dessus.

D'autres arguments [36], rigoureusement établis, existent en faveur de cette correspondance. Ils considèrent le problème plus général de la localisation dynamique dans un système quantique dynamique dont l'Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}\phi(t) , \quad (5.15)$$

où les deux opérateurs  $\hat{H}_0$  et  $\hat{V}$  sont aléatoires, pris dans l'ensemble orthogonal Gaussien, et la dépendance temporelle de l'Hamiltonien est spécifiée par la fonction  $\phi(t)$ . Lorsque  $\phi(t)$  s'écrit comme la somme de  $d$  fonctions harmoniques :

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^d A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) , \quad (5.16)$$

où les  $\omega_n$  sont  $d$  fréquences incommensurables, les corrections quantiques à la diffusion classique, corrections dites de localisation faible (voir section C.1.1 du chapitre 2 et annexe A), se comportent de façon similaire à celles pour la conductivité  $\delta\sigma(t)$  dans un modèle d'Anderson de dimensionnalité  $d$ , de la classe de symétrie orthogonale. En particulier, il est montré que les phases  $\varphi_n$  n'ont pas d'effet sur la symétrie par renversement du temps.

L'analogie entre le type de système quantique dynamique (5.15) et le Kicked Rotor (périodique ou quasi-périodique), mentionnée par les auteurs de l'étude [36], tient en deux

points : (i) la matrice de l'opérateur  $\exp[-i\hat{p}^2/2k]$  dans la base  $l$  des impulsions  $p = lk$  est une matrice pseudo-aléatoire appartenant à l'ensemble circulaire orthogonal (voir section B.1 du chapitre 3) ; (ii) le cas où  $\hat{V}$  est une matrice aléatoire (qui peut coupler des sites  $l$  éloignés les uns des autres) et la fonction de modulation temporelle  $\phi(t)$  est la somme de trois fonctions harmoniques est le pendant du cas où  $\hat{V} = \cos \hat{\theta}$  (couplant des sites voisins) et la fonction de modulation temporelle est une peigne de Dirac que multiplie deux fonctions harmoniques.

## B Réalisation expérimentale

Ce qui motive notre intérêt pour le Kicked Rotor quasi-périodique est qu'il peut être facilement réalisé à partir du dispositif expérimental présenté au chapitre 4 précédent, pour le Kicked Rotor 1D périodique atomique. Il suffit, en effet, de moduler l'amplitude des kicks d'onde stationnaire en fonction du temps. La modification du dispositif, réalisée par l'équipe de J.-C. Garreau et P. Szriftgiser, a permis d'autres études expérimentales des effets de perturbations quasi-périodiques sur la localisation dynamique [110, 126–128].

Le montage permettant cette modulation est représenté en figure (5.5). Les impulsions lasers sont générées par un modulateur acousto-optique, lui-même contrôlé par un générateur d'impulsions digital. C'est l'amplitude de ces impulsions qui est modulée temporellement.

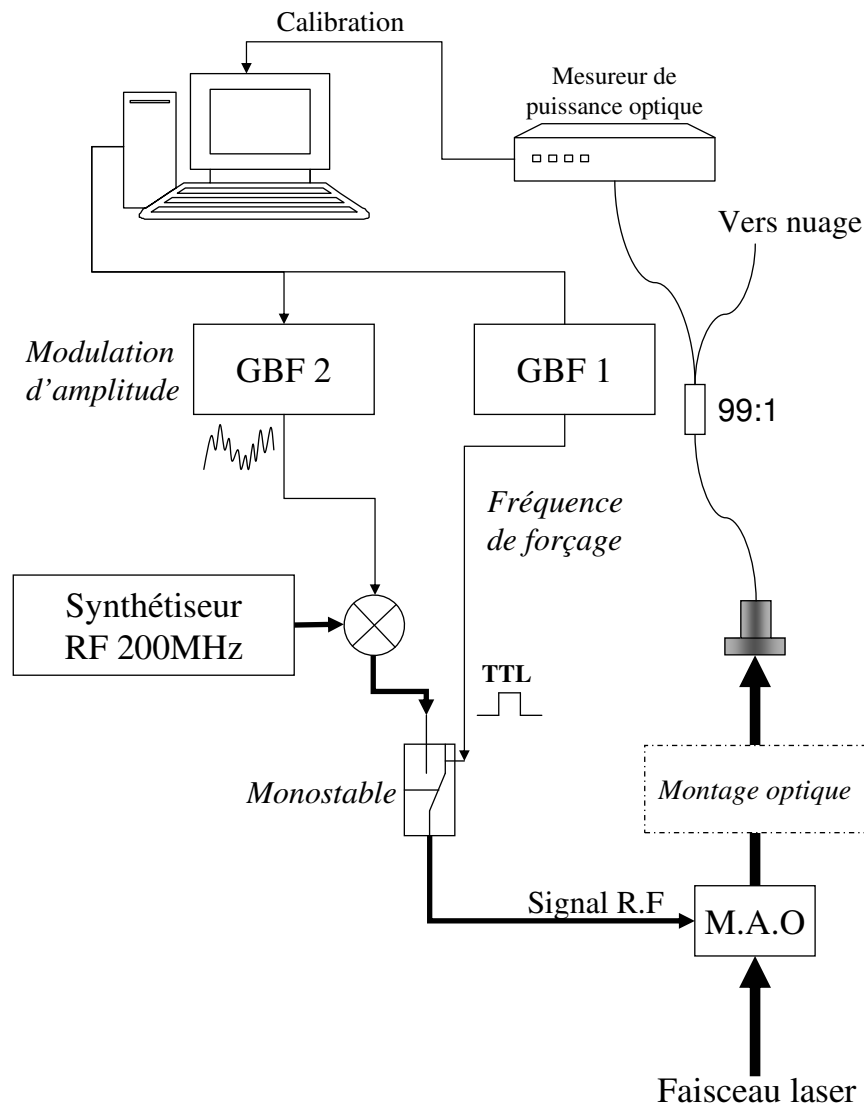
Le Kicked rotor quasi-périodique ainsi réalisé est soumis aux mêmes limitations expérimentales précédemment évoquées pour le Kicked Rotor périodique 1D (voir section D du chapitre 4 précédent). En particulier, la durée des expériences de transport est limitée à  $t \lesssim 150$  kicks, du fait de la chute des atomes suivant la direction verticale perpendiculaire à l'onde stationnaire et du fait de la présence de sources de décohérence.

## C Effets de temps fini et théorie d'échelle en temps

Les premières études numériques sur le Kicked Rotor quasi-périodique [35, 119] ont montré l'existence d'une transition de type Anderson entre un régime localisé pour les faibles valeurs de  $K < K_c$  et un régime diffusif au delà d'un certain seuil  $K > K_c$ . Cette transition a pu être observée comme suit : l'état initial est choisi piqué en  $p = 0$ , et son évolution temporelle est déterminée numériquement en itérant l'opérateur d'évolution sur une période :

$$U_{\text{qp}}(t; t-1) = e^{-iK \cos x [1 + \varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) \cos(\varphi_3 + \omega_3 t)] / k} e^{-ip^2/2k}, \quad (5.17)$$

jusqu'à quelques  $10^6$  kicks, pour différentes valeurs du paramètre  $K$ . Dans le régime localisé, les distributions en impulsion, stationnaires, sont observées exponentiellement localisées, si bien que la longueur de localisation peut être déterminée en ajustant la loi exponentielle  $\exp(-2|l|/\ell)$  aux données. Dans le régime délocalisé, une expansion diffusive est observée et les coefficients de diffusion associés peuvent être déterminés soit à partir du comportement temporel de la variance de la distribution en impulsion  $\langle l^2 \rangle$ , soit en ajustant une Gaussienne aux données pour la distribution en impulsion. La dépendance



**Fig. 5.5:** Schéma simplifié du dispositif radiofréquence chargé de générer les impulsions d'onde stationnaire modulées en amplitude. Le signal de modulation du générateur basse fréquence GBF 2 module l'amplitude du signal radiofréquence issu du synthétiseur. Une fois celui-ci modulé en amplitude, le GBF 1, impose la fréquence des impulsions via le monostable. Le signal radiofréquence modulé et pulsé alimente le modulateur acousto-optique qui génère les impulsions laser. Une partie de faisceau laser est prélevée via un coupleur fibré (1%) pour mesurer la puissance des impulsions optiques générées. Cette mesure de puissance permet à l'ordinateur de calculer la puissance de la radiofréquence à appliquer au modulateur acousto-optique (en réalité l'amplitude de la modulation sur le GBF 2) pour obtenir la puissance optique correspondant au potentiel de (5.4).

de la longueur de localisation en fonction de  $K$ , au voisinage de  $K_c$ , est bien approximée par une loi de puissance :

$$\ell \sim |K - K_c|^{-\nu}, \quad (5.18)$$

avec  $\nu \approx 1.5$ . De même,  $D$  s'annule en  $K_c$  avec la loi de puissance :

$$D \sim |K - K_c|^s, \quad (5.19)$$

avec  $s \approx 1.25$  [35].

Ces études suggèrent que la transition d'Anderson ne peut être observée qu'à des temps très longs,  $t \gtrsim 10^5$  kicks, temps inaccessibles avec le dispositif expérimental précédemment décrit (voir précédente section et le chapitre 4). Est-ce qu'une observation expérimentale est réellement inenvisageable ? Quelle est la raison profonde de cette nécessité de temps très longs d'observation ?

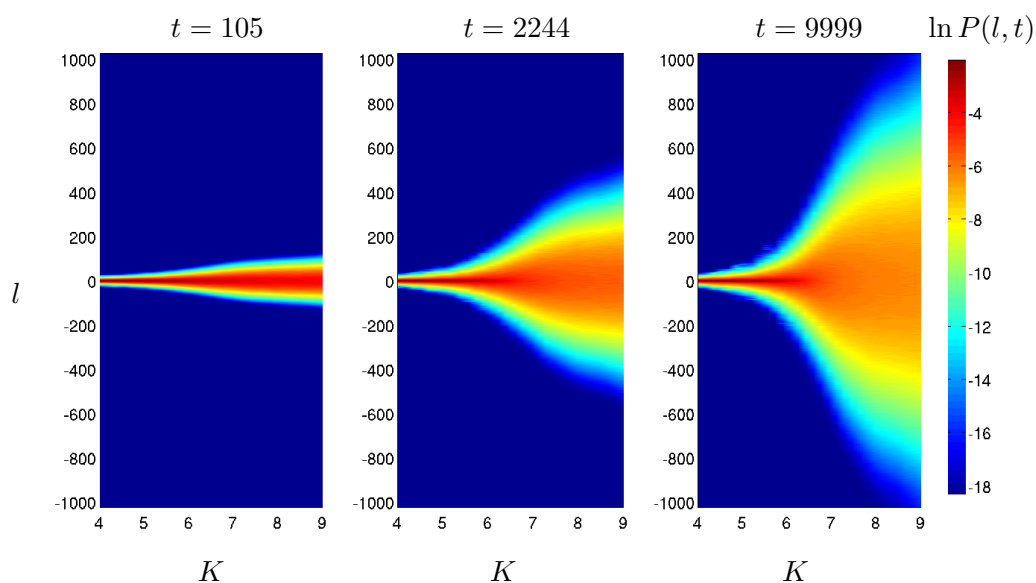
D'abord, se rappelant comment le phénomène de localisation dynamique apparaît dans le Kicked Rotor périodique 1D, l'on n'est pas complètement surpris : la localisation n'est observée dans ce système qu'à temps suffisamment long  $t \gg t_\ell$ , où  $t_\ell$  est le temps de localisation qui varie comme la longueur de localisation  $t_\ell \sim \ell$ . Ainsi, dans le cas du Kicked Rotor quasi-périodique au régime localisé, un état stationnaire exponentiellement localisé ne peut être observé qu'à temps suffisamment long  $t \gg t_\ell$ . Or, dans le cas d'un système 3D ou effectivement 3D comme celui que l'on considère, le temps de localisation varie comme  $t_\ell \sim \ell^3$  (voir notre article [120] reproduit en section E de ce chapitre). Comme la longueur de localisation diverge à la transition, de même le temps de localisation diverge.

Supposons maintenant que nous soyons limités en temps d'observation, comme c'est le cas, en particulier, expérimentalement. Qu'observe-t-on lorsque l'on varie le paramètre de stochasticité  $K$ , passant du régime localisé  $K < K_c$  (où  $K_c$  est le seuil de la transition que l'on observerait, par exemple, à partir d'une simulation numérique infiniment longue  $t \rightarrow \infty$ ) au régime diffusif  $K > K_c$  ? Comme représenté en figure 5.6, le changement de dynamique, entre une dynamique localisée et une dynamique diffusive, est de plus en plus net, brutal, à mesure que cette limite de temps d'observation augmente. Ceci fait penser à des effets de taille finie. Et de fait, nous pouvons associer une longueur  $L_t$  au temps d'observation maximal :  $L_t$  est la distance que le Kicked Rotor quasi-périodique “diffuse” pendant le temps  $t$ . Ici, nous avons mis des guillemets au terme “diffuse”, du fait que la dynamique n'est pas, bien entendu, toujours diffusive.

Différents arguments permettent de relier  $L_t$  à  $t$  au régime critique qui nous intéresse. Considérons l'argument heuristique suivant, du type de celui de Thouless (voir section C.2.4 du chapitre 2 et [119]) : la conductance adimensionnée  $g$  s'écrit comme le rapport  $g \sim E_c/\Delta$  de l'énergie de Thouless  $E_c \sim D/L_t^2$ ,  $D$  étant le coefficient de diffusion, sur  $\Delta \sim B/L_t^3$ , l'espacement moyen d'un échantillon de taille  $L_t$  avec  $B \sim 1$  la largeur de la bande. Au seuil de la transition d'Anderson, la conductance adimensionnée  $g$  a une valeur finie, critique,  $g_c$ . Ainsi, à  $K_c$ , le coefficient de diffusion varie comme  $D \sim Bg_c/L_t$ , ce qui implique  $L_t \sim t^{1/3}$  à la transition.

Cet argument se formule de façon plus rigoureuse dans l'espace des fréquences  $\omega$ , réciproque à celui temporel, où  $L_\omega \sim [D(\omega)/\omega]^{1/2}$  avec la constante de diffusion  $D(\omega)$  définie à partir de la probabilité de diffusion quantique (voir section B.2 du chapitre 2 et annexe





**Fig. 5.6:** Effets de temps fini sur la transition d'Anderson, telle qu'observée numériquement avec le Kicked Rotor quasi-périodique. Les distributions en impulsion  $P(l, t)$  [voir équation (3.30)] aux temps  $t = 105$ ,  $t = 2244$  et  $t = 9999$ , sont représentées en fonction du paramètre de désordre  $K$ . Le passage d'un régime localisé où les distributions sont stationnaires et localisées, à un régime où l'expansion est diffusive est, visiblement, de plus en plus marqué à mesure que le temps d'observation augmente. Pour les très faibles valeurs de  $K$ , la distribution est stationnaire, même aux temps courts, et (exponentiellement) localisée. Cependant au voisinage du seuil  $K \lesssim K_c$ , les fonctions d'ondes mettent un temps très long  $t_\ell$  pour se localiser. Ce temps de localisation diverge à la transition comme le cube de la longueur de localisation.

B). A la transition, la longueur fréquentielle  $L_\omega \sim \omega^{-1/3}$  [129, 130]. Ceci est le pendant de  $L_t \sim t^{1/3}$  dans le domaine temporel. Dans notre article [120] (reproduit à la section E de ce chapitre), nous donnons une dérivation via la théorie d'échelle de ce fait. Enfin, à la section A du chapitre 7, nous montrons que ceci peut être retrouvé, également, via la théorie auto-cohérente.

Ainsi, trois longueurs caractéristiques rentrent en jeu dans le problème de transport considéré. La longueur de localisation  $\ell$  (on se place ici dans le régime localisé, dans le régime délocalisé, la longueur de corrélation joue un rôle similaire), la taille du système  $L$  (qui est la taille  $L$  de la base finie  $l = 1, \dots, L$  considérée lors de simulations numériques - voir section A.2.1 du chapitre 3 - ou la taille de la boîte classique dans le cas expérimental - voir section B.1 du chapitre 4), et la longueur temporelle  $L_t$ . Au voisinage de la transition,  $\ell$  est grande, et pour  $L_t < L, \ell$  (ce qui est le cas à la fois expérimentalement, du fait des temps d'observation courts, et numériquement, du fait qu'étant uni-dimensionnel, l'on peut travailler à  $L$  suffisamment grand, même à temps très long  $t = 10^6$  kicks), la localisation ne peut avoir lieu à des échelles plus grandes que  $L_t$  qui est donc la longueur pertinente. Il ne peut y avoir de transition de localisation brutale à  $t$  fini. C'est seulement lorsque  $L = L_t \rightarrow \infty$  que le système peut être à criticalité.

Comme expliqué en section C.2 du chapitre 2, l'étude des caractéristiques de la transition d'Anderson peut s'effectuer en analysant comment varient les propriétés de transport en fonction de la taille  $L$  de l'échantillon de système désordonné considéré. Cela revient à effectuer une renormalisation phénoménologique, ce qui est particulièrement intéressant du fait que la renormalisation est la méthode d'étude la plus fondamentale des transitions de phase du second-ordre telles que la transition d'Anderson. Ce type d'approche des propriétés de localisation des systèmes désordonnés constitue la très fameuse théorie d'échelle à un paramètre [8–10], qui se formule pour la longueur de localisation d'un échantillon de taille  $L$  sous la forme d'une hypothèse d'échelle :

$$\frac{\ell(L)}{L} = \mathcal{F}\left(\frac{\xi(K)}{L}\right), \quad (5.20)$$

à un paramètre  $\xi(K)$  qui ne dépend que du paramètre de désordre  $K$ .

La discussion précédente suggère une généralisation de l'équation (5.20) pour une hypothèse d'échelle à temps fini :

$$\frac{\ell(L_t)}{L_t} = \mathcal{F}\left(\frac{\xi(K)}{L_t}\right), \quad (5.21)$$

Dans le Kicked Rotor quasi-périodique, une quantité fondamentale caractérisant le transport est la variance  $\langle l^2 \rangle$  de la distribution en impulsion. Dans le régime localisé,  $\langle l^2(t \gg t_\ell) \rangle \approx \ell(L_t \rightarrow \infty)^2/2$ . L'on peut donc voir  $\sqrt{2\langle l^2 \rangle}$  comme l'équivalent de  $\ell(L_t)$ . Ceci nous amène à formuler une hypothèse de loi d'échelle à un paramètre pour la variance  $\langle l^2 \rangle$  :

$$\Lambda = \frac{\langle l^2 \rangle}{t^{2/3}} = f\left(\frac{\xi(K)}{t^{1/3}}\right). \quad (5.22)$$

À l'aune de ce l'on a vu sur la renormalisation en section C.2 du chapitre 2, on peut interpréter l'exposant non trivial  $2/3$  apparaissant dans l'expression  $\langle l^2 \rangle/t^{2/3}$  comme le contraste à appliquer lors de chaque réduction d'échelle, i.e. lors de chaque augmentation

du temps  $t$ . Le bon réglage de contraste est nécessaire à l'observation de la propriété d'invariance d'échelle au seuil de la transition, qui est une caractéristique fondamentale des transitions de phase du second ordre telles que la transition d'Anderson. Ainsi, à  $K_c$ , la quantité  $\Lambda = \langle l^2 \rangle / t^{2/3}$  serait invariante d'échelle, i.e. ne dépendrait pas du temps, signature d'une diffusion anormale à la transition.

L'analyse des données expérimentales et numériques, en vue de savoir si oui ou non l'hypothèse de loi d'échelle (5.22) est vérifiée, est présentée dans la suite. Ceci est particulièrement intéressant du fait que l'exposant critique  $\nu$  de la longueur de localisation pourrait, si c'est le cas, être extrait de la divergence du paramètre d'échelle  $\xi(K)$  en  $K_c$ . Ce paramètre est en effet censé diverger en loi de puissance suivant (voir section C.2 du chapitre 2) :

$$\xi(K) \sim |K - K_c|^{-\nu} . \quad (5.23)$$

Il n'est pas inutile de souligner que l'observation d'une telle loi d'échelle (5.22) avec un paramètre d'échelle divergeant à la transition suivant (5.23) est une *preuve intangible* du fait que l'on observe une transition de phase métal-isolant, du second ordre, gouvernée par le degré de désordre, dans un système où la décohérence et les interactions sont négligeables, soit, la transition d'Anderson.

## D Article publié dans *Physical Review Letters* : “Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves”

Nous reproduisons dans cette section notre article intitulé “Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves” publié dans la revue *Physical Review Letters* [37]. Il faut noter un changement de notation mineur entre notre manuscrit et cet article : l'angle  $\theta$  (5.4) est noté  $x$  dans l'article (position d'un atome dans l'onde stationnaire).

**Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves**Julien Chabé,<sup>1</sup> Gabriel Lemarié,<sup>2</sup> Benoît Grémaud,<sup>2</sup> Dominique Delande,<sup>2</sup> Pascal Szriftgiser,<sup>1</sup> and Jean Claude Garreau<sup>1</sup><sup>1</sup>*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université des Sciences et Technologies de Lille, CNRS; CERLA; F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France\**<sup>2</sup>*Laboratoire Kastler-Brossel, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, ENS, CNRS; 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France*  
(Received 11 July 2008; revised manuscript received 11 September 2008; published 15 December 2008)

We realize experimentally an atom-optics quantum-chaotic system, the quasiperiodic kicked rotor, which is equivalent to a 3D disordered system that allows us to demonstrate the Anderson metal-insulator transition. Sensitive measurements of the atomic wave function and the use of finite-size scaling techniques make it possible to extract both the critical parameters and the critical exponent of the transition, the latter being in good agreement with the value obtained in numerical simulations of the 3D Anderson model.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.255702](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.255702)

PACS numbers: 03.75.-b, 05.45.Mt, 64.70.Tg, 72.15.Rn

The metal-insulator Anderson transition plays a central role in the study of quantum disordered systems. An insulator is associated with localized states, while a metal generally displays diffusive transport associated with delocalized states. The Anderson model [1] describes such a transition, due to quantum interference effects driven by the amount of disorder in the system. Starting from the “tight-binding” description of an electron in a lattice, Anderson postulated in 1958 that the dominant effect of impurities in a crystal is to randomize the diagonal term of the Hamiltonian, and showed that this generally leads to a localization of the wave function, in sharp contrast with the Bloch-wave solution for a perfect crystal. This model has been extended from its original solid-state physics scope [1–4] to a whole class of systems in which waves propagate in a disordered medium such as quantum-chaotic systems [5,6] and electromagnetic radiation [7–9]. The model predicts a wealth of interesting phenomena. In one dimension, the wave function is always localized as recently observed in experiments using atomic matter waves in a disordered optical potential [10,11]; in three dimensions it predicts a phase transition between a localized (insulator) and a delocalized (metal) phase at a well-defined mobility edge, the density of impurities or the energy being the control parameter.

Despite the wide interest on the Anderson transition, few experimental results are available. In a crystal, it is very difficult to obtain the conditions for a clean observation of the Anderson localization. First, one has no direct access to the electronic wave function and must rely on modifications of bulk properties like conductivity [2,12]. Second, it is difficult to reduce decoherence to a low enough level. We engineered a matter-wave system described by an Anderson-like model. This allows us to probe the physics of disordered systems in much better conditions than in condensed matter physics [13]: namely, almost no interaction between particles, weak absorption in the medium, no coupling with a thermal reservoir which could destroy

localization and possibility of measuring the final quantum state of the system after a given interaction time. The system, the quasiperiodic kicked rotor [5,6,14,15] consists of cold cesium atoms exposed to a pulsed laser standing wave. The dynamics is effectively one dimensional along the axis of the laser beam, as transverse directions are uncoupled. The atoms interact periodically with a sinusoidal potential whose amplitude is modulated at frequencies  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . The corresponding Hamiltonian is

$$H = \frac{p^2}{2} + K \cos x [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_3 t)] \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n), \quad (1)$$

where  $x$  is the particle position,  $p$  its momentum, and  $K$  the pulse intensity. We have chosen normalized variables such that  $x$  is measured in units of the spatial period of the potential divided by  $2\pi$ , the particle's mass is unity and time is measured in units of pulse period  $T_1$ .

By taking  $\varepsilon = 0$  in Eq. (1) one obtains the standard (strictly time-periodic) kicked rotor, a system known to display the phenomenon of *dynamical localization* [5]: when the classical dynamics is a chaotic diffusion [16], the quantum dynamics is frozen after some localization time by quantum interference. Then, the wave function is exponentially localized in *momentum space*. Dynamical localization has been shown to be a direct analogue of Anderson localization in one dimension [6], with the following correspondences: dynamical localization takes place in momentum space, not in real space; the “stochasticity parameter”  $K$  [see Eq. (1)] corresponds to the ratio of hopping to diagonal energy in the Anderson model (the larger  $K$ , the smaller the disorder strength). Random disorder in the Anderson model corresponds to a pseudorandom potential in the kicked rotor. The experimental observation of dynamical localization in the kicked rotor [14] is actually the first observation of Anderson 1D localization with atomic matter waves.

In order to observe the Anderson transition, one must generalize the kicked rotor to obtain a system analogous to the 3D Anderson model. This is done by making the Hamiltonian depend on time in a quasiperiodic way with *three* incommensurate frequencies, i.e., by taking  $\varepsilon \neq 0$  in Eq. (1) with  $\omega_2$  and  $\omega_3$  incommensurate numbers. The resulting system has been shown to be substantially equivalent to the 3D Anderson model [15], the additional spatial coordinates in the Anderson model corresponding to the additional time dependencies in the quasiperiodic kicked rotor. The parameters controlling the dynamics are the kick strength  $K$  and the modulation amplitude  $\varepsilon$ . In the  $(K, \varepsilon)$  plane, the  $\varepsilon = 0$  line corresponds to localized dynamics (case of the periodic kicked rotor) and the Anderson transition takes place along a critical line in the plane  $\varepsilon > 0$ , as shown in Fig. 1.

Our atom-optics realization of the kicked rotor has been described in detail elsewhere [17–19]. We cool cesium atoms in a standard magneto-optical trap, and, after a Sisyphus-molasses phase, we obtain a cloud of  $10^7$  atoms at a temperature of  $3.2 \mu\text{K}$ . This prepares a sample of atoms in a thermal state whose momentum distribution is much narrower than the expected localization length. The atoms then interact with the optical potential generated by a horizontal standing wave. An acousto-optical modulator driven by an arbitrary-form synthesizer modulates the amplitude of the optical potential. One thus generates  $0.9 \mu\text{s}$ -long pulses at  $T_1 = 27.778 \mu\text{s}$  (corresponding to

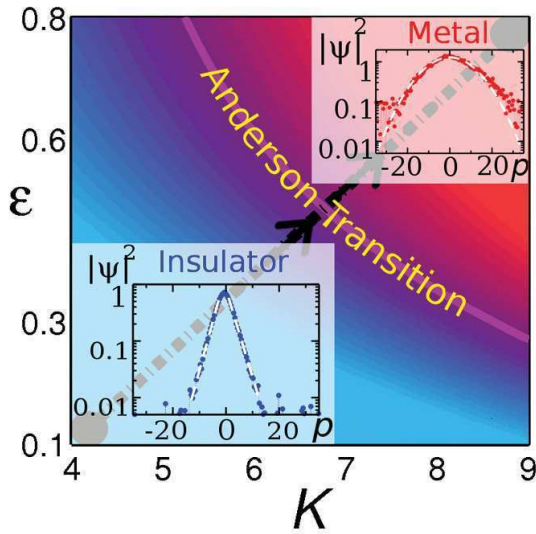


FIG. 1 (color). Phase diagram of the quasiperiodic kicked rotor, from numerical simulations. The localized (insulator) region is shown in blue, the diffusive (metallic) region is shown in red. The experimental parameters are swept along the diagonal dash-dotted line. The insets show the *experimentally observed* momentum distributions, localized in the insulator region and Gaussian in the diffusive (metallic) region.

an effective Planck constant  $\hbar = 2.89$ ), to which is superimposed a modulation of the form Eq. (1), with  $\omega_2/2\pi = \sqrt{5}$  and  $\omega_3/2\pi = \sqrt{13}$ . The standing wave, of typical power 160 mW focused on a waist of 1.5 mm, is far off-resonant (7.3 GHz to red, or  $1.4 \times 10^3$  natural widths), in order to reduce spontaneous emission. Great care has also been taken in insuring the horizontality of the standing wave to better than  $0.1^\circ$ , in order to prevent gravity mixing of quasimomentum classes on the time scale of the experiment. Atomic momentum distribution measurements are performed with Raman transitions [18]. The Raman beams are horizontal, making an  $11^\circ$  angle with the standing wave.

The experimental values of the parameters are carefully chosen. First, in order to prevent classical (KAM barrier) localization effects one must have  $K > 2$  [16]. We numerically checked that the classical dynamics is fully diffusive in our case. This excludes a classical origin for the observed transition. Second, in order to confine the transition to a narrow range of parameters one must cross the critical curve (Fig. 1) “at a right angle”; so we vary simultaneously  $K$  and  $\varepsilon$  along a line going from  $K = 4$ ,  $\varepsilon = 0.1$  in the localized region to  $K = 9$ ,  $\varepsilon = 0.8$  in the diffusive region; the critical line is then crossed at  $K = K_c = 6.6$ . Third, short enough pulses must be used, so that they can be considered as delta pulses. Numerical simulations with a finite pulse duration ( $0.9 \mu\text{s}$ ) show that less than 1% of the atoms are sensitive to the duration of the pulses. Finally, decoherence processes must be kept as small as possible. We have identified two dominant decoherence sources in our experiment: (i) Spontaneous emission, which is not included in the Hamiltonian Eq. (1) and (ii) the deviation of the standing wave from strict horizontality, which mixes quasimomentum classes and produces a stray momentum diffusion. The fact that numerical simulations of the “pure” quasiperiodic kicked rotor shown hereafter agree very well with the experimental results (in particular for the position of the Anderson transition and for the critical exponent) proves that spurious effects are well under control. We have also checked that inclusion of these effects in the numerical calculations only leads to small changes for  $t \leq 150$  kicks.

In order to observe the Anderson transition we apply a sequence of kicks to the atomic cloud and measure its dynamics. In the localized regime, the evolution of its momentum distribution is “frozen” after the localization time ( $\sim 12$  kicks) into an exponential curve  $\exp(-|p|/p_{\text{loc}})$  (where  $p_{\text{loc}}$  is the *localization length*). In the diffusive regime, the initial Gaussian shape is preserved and the distribution gets broader as kicks are applied, corresponding to a linear increase of the average kinetic energy. The insets in Fig. 1 show the experimentally observed momentum distributions, an exponentially localized distribution for  $K < K_c$  (blue curve), characteristic of dynamical localization, and a broad, Gaussian-shaped distribution for  $K > K_c$  (red curve), characteristic of the diffusive regime.

Instead of measuring the full momentum distribution, it is sufficient, and much easier, to measure the population  $\Pi_0(t)$  of the zero velocity class [20], as  $\Pi_0^{-2}(t)$  is proportional to  $\langle p^2 \rangle(t)$  (as the total number of atoms is constant). We performed several experimental runs corresponding to points in the  $(K, \epsilon)$  plane. In each run the value of  $\Pi_0(t)$  was recorded as the kicks were applied. We also recorded the background signal obtained by not applying the Raman detection sequence, and the total number of atoms in the cold-atom cloud. These signals are used to correct the experimental data from background signals and long-term drifts of the cloud population. Figure 2 shows the experimentally observed  $\Pi_0^{-2}(t)$  and clearly shows the transition from the localized to the diffusive regime, with an intermediate regime of anomalous diffusion.

When one approaches the critical point from the insulator side, the localization length diverges, whereas, on the metallic side, the diffusion constant vanishes. However, a strict divergence can be observed only in macroscopically large samples; in small samples the divergence is smoothed. This fact plagued the numerical studies of the solid-state Anderson transition, as only a finite (small) lattice can be dealt with in a computer. In our system, a singular behavior would show up only for prohibitively large numbers of kicks, which are, in practice, limited to 150. To overcome this limitation, a technique named “finite-size scaling” [12,21,22] was introduced, whose basic idea is to infer the scaling law allowing proper extrapolation of the measured localization length to an infinite sample. We will next show that our data obey the scaling laws predicted for the Anderson model by renor-

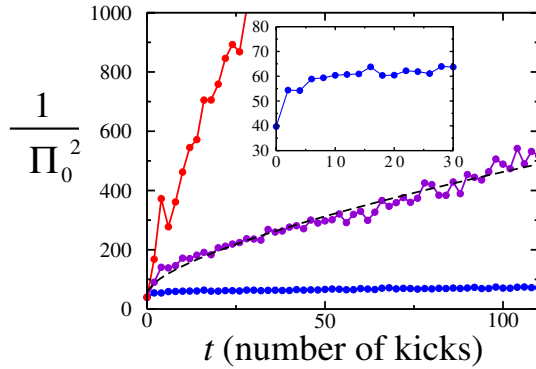


FIG. 2 (color online). Temporal dynamics of the quasiperiodic kicked rotor. We measure the population  $\Pi_0(t)$  of the zero-momentum class as a function of time and plot the quantity  $\Pi_0^{-2}(t)$  (proportional to  $\langle p^2 \rangle(t)$ ). Clearly, it tends to saturate in the localized regime (blue curve) and increases linearly with time in the diffusive regime (red curve). Close to the critical point (purple curve), it displays anomalous diffusion  $\Pi_0^{-2}(t) \sim t^{2/3}$ , as expected from theoretical arguments [24]; the critical behavior is well fitted by  $\Pi_0^{-2}(t) = A + Bt^{2/3}$  (dashed line).

malization theory, which will allow us to extract the critical exponent associated with the transition.

We adapted the standard finite-size scaling approach used in numerical studies of the Anderson transition [3] assuming that, for finite interaction time, the quantity  $\Lambda(K, t) = \Pi_0^{-2}(K, t)t^{-2/3}$  is an arbitrary function  $f(\xi t^{-1/3})$  [23–26], with a scaling parameter  $\xi$  which depends *only* on  $K$ . Using the results obtained for various values of  $t$  and  $K$  one can reconstruct both the function  $f$  and the scaling parameter  $\xi(K)$  by a minimization procedure [26,27] (no assumption on the form of  $f$  is made). The result is shown in Figs. 3(a) and 3(b) for numerical simulations and in Figs. 3(c) and 3(d) for the experimental results. In both cases, the scaling hypothesis is justified by the fact that all points in Figs. 3(a) and 3(c) lie on a single curve (within the experimental error). The remarkable feature is the existence of two branches: the upper one corresponds to diffusive motion while the lower one corresponds to the localized regime, the critical point being at the tip joining the two branches. The scaling parameter  $\xi(K)$  is plotted in Figs. 3(b) and 3(d): It represents the localization length in the localized regime and scales as the inverse of the diffusion constant in the diffusive regime. Clearly, it increases rapidly in the vicinity of the critical value  $K_c$ , on both sides of the transition, and it is found to behave as  $\xi \sim |K - K_c|^{-\nu}$  when  $K \rightarrow K_c$ . This divergence at the critical point is a key property of the Anderson phase

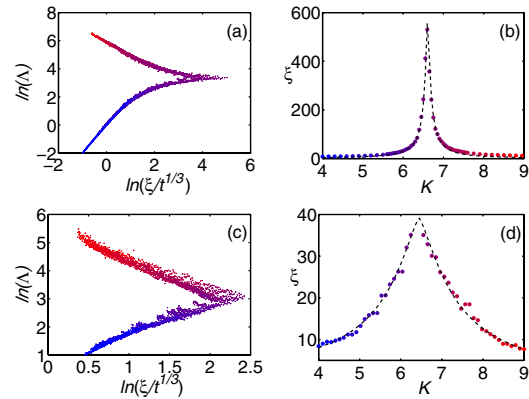


FIG. 3 (color online). Finite-size scaling applied to the results of numerical simulations (top) and to the experimental results (bottom). Graphs (a) and (c) emphasize that all data points corresponding to the quantity  $\Lambda(k, t) = \Pi_0^{-2}(K, t)t^{-2/3}$  obtained for various values of  $K$  and  $t$  can actually be described by a scaling function  $f(X)$  depending only on the variable  $X = \xi(K)t^{-1/3}$ . The finite-size technique makes it possible to determine both  $f(X)$ , shown in (a) and (c), and the scaling parameter  $\xi(K)$ , shown in (b) and (d). Close to  $K_c$ , the behavior of  $\xi(K)$  is well fitted by Eq. (2) (dashed lines), giving  $K_c = 6.6 \pm 0.1$  (simulation) and  $K_c = 6.4 \pm 0.2$  (experiment). The critical exponent is  $\nu = 1.60 \pm 0.05$  (simulation) and  $\nu = 1.4 \pm 0.3$  (experiment).



transition. However, phase-breaking mechanisms induced by decoherence processes smooth the algebraic divergence. We model such effects by introducing a small cutoff of the divergence due to the residual decoherence:

$$\frac{1}{\xi(K)} = \alpha|K - K_c|^\nu + \beta. \quad (2)$$

The experimental observations and the numerical data have been fitted with this formula [dashed curves in Figs. 3(b) and 3(d)]. We found  $K_c = 6.4 \pm 0.2$  (very close to the value  $K_c = 6.6 \pm 0.1$  obtained from the numerical simulation), and a critical exponent  $\nu = 1.4 \pm 0.3$  [28], which is consistent with the numerical value within the error bars. The good agreement between the numerical simulations and the experimental results proves that spurious effects (such as decoherence) are under control. We emphasize that there are no adjustable parameters in our procedure, all parameters are determined using the atoms themselves as probes. Once the existence of the scaling law established, it is more convenient to use a *global* analysis of the numerical data at various values of  $K$  (see Refs. [12,22,26]). This, together with the fact that numerical simulations can be run up to several thousands kicks, make it possible to obtain a more precise numerical value for the critical exponent  $\nu = 1.60 \pm 0.05$ . Note, finally, that although the data displayed here concern a particular set of parameters, we verified experimentally the presence of the transition for other parameters.

In conclusion, we have presented the first experimental evidence of the Anderson transition with atomic matter waves. The transition is characterized by a well defined critical point, a divergence of the localization length below the critical point (in the localized regime) and a vanishing of the diffusion constant above the critical point (in the diffusive regime). We have determined the scaling laws and the critical exponent  $\nu$  of the Anderson transition, which is significantly larger than unity and very close to the value  $\nu \simeq 1.58$  obtained in recent numerical experiments [12,22] on the Anderson model, enforcing the assumption [15] that the two systems are substantially equivalent. Whether this exponent is universal (i.e., independent of the microscopic details) or not remains to be studied. A very interesting point is that our Anderson-equivalent quasiperiodic kicked rotor can be easily generalized to higher dimensions simply by adding new incommensurable frequency, which opens perspectives for fascinating studies of the dependence of the critical exponent on the dimension of the underlying Anderson model.

The authors acknowledge D. Shepelyansky for bringing Ref. [15] to their attention, and for fruitful discussions, and G. Beck for help with the experiment.

---

\*URL: [www.phlam.univ-lille1.fr/atfr/cq](http://www.phlam.univ-lille1.fr/atfr/cq)

[1] P.W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).

- [2] D.M. Basko, I.L. Aleiner, and B.L. Altshuler, Ann. Phys. (Leipzig) **321**, 1126 (2006).
- [3] B. Kramer and A. Mackinnon, Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993).
- [4] D.J. Thouless, Phys. Rep. **13**, 93 (1974).
- [5] G. Casati, B.V. Chirikov, J. Ford, and F.M. Izrailev, *Stochastic Behavior of A Quantum Pendulum Under Periodic Perturbation* (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1979), Vol. 93, p. 334.
- [6] D.R. Grempel, R.E. Prange, and S. Fishman, Phys. Rev. A **29**, 1639 (1984).
- [7] M. Störzer, P. Gross, C.M. Aegerter, and G. Maret, Phys. Rev. Lett. **96**, 063904 (2006).
- [8] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and B. Segev, Nature (London) **446**, 52 (2007).
- [9] C. Dembowsky, H.D. Gräf, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, and T. Weiland, Phys. Rev. E **60**, 3942 (1999).
- [10] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, Nature (London) **453**, 891 (2008).
- [11] G. Roati, C. d'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio, Nature (London) **453**, 895 (2008).
- [12] A. Mackinnon, J. Phys. Condens. Matter **6**, 2511 (1994).
- [13] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen, and U. Sen, Adv. Phys. **56**, 243 (2007).
- [14] F.L. Moore, J.C. Robinson, C.F. Bharucha, B. Sundaram, and M.G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **75**, 4598 (1995).
- [15] G. Casati, I. Guarneri, and D.L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **62**, 345 (1989).
- [16] The standard kicked rotor becomes globally chaotic for  $K > 5$ , but our quasiperiodic version is chaotic for much smaller values  $K > 2$ .
- [17] P. Szriftgiser, H. Lignier, J. Ringot, J.C. Garreau, and D. Delande, Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul. **8**, 301 (2003).
- [18] J. Ringot, P. Szriftgiser, and J.C. Garreau, Phys. Rev. A **65**, 013403 (2001).
- [19] J. Ringot, Y. Lecoq, J.C. Garreau, and P. Szriftgiser, Eur. Phys. J. D **7**, 285 (1999).
- [20] The resolution of the Raman setup is chosen so that the width of this velocity class is 5 normalized momentum units. We experimentally verified that such a resolution produces a broadening of momentum distributions of less than 10%.
- [21] M.E. Fisher and M.N. Barber, Phys. Rev. Lett. **28**, 1516 (1972).
- [22] K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **82**, 382 (1999).
- [23] F. Wegner, Z. Phys. B **25**, 327 (1976).
- [24] T. Ohtsuki and T. Kawarabayashi, J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 314 (1997).
- [25] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1994), 2nd ed.
- [26] G. Lemarié, J. Chabé, J.C. Garreau, P. Szriftgiser, B. Grémaud, and D. Delande (to be published).
- [27] A. MacKinnon and B. Kramer, Z. Phys. B **53**, 1 (1983).
- [28] As is well known from numerical experiments on the Anderson model, the finite-size scaling method slightly underestimates the critical exponents [12].

Thèse	Article
$\theta$	$x$
$l$	$\mathbf{p}$
$t_\ell$	$\tau_{\text{loc}}$
$\langle p^2 \rangle = 2D_{\text{cl}}t$	$\langle p^2 \rangle = D_{\text{cl}}t$
$P(l, t) =  \psi(l, t) ^2 \sim \exp(-2 l /\ell)$	$ \psi(\mathbf{p}, t) ^2 \sim \exp(- \mathbf{p} /\ell)$

**Tab. 5.1:** Changements de notations et de conventions importants entre la thèse et l'article "Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Aomic Matter Waves : Theory and Experiment".

## E Article accepté à *Physical Review A* : "Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Aomic Matter Waves : Theory and Experiment"

Nous reproduisons dans cette section notre article intitulé "Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Aomic Matter Waves : Theory and Experiment" accepté à la revue *Physical Review A*. Il accompagne notre courte lettre publiée dans la revue *Physical Review Letters* [37]. Cet article reprend, parfois, certaines discussions que nous avons déjà développées, mais, le plus souvent, les complète. Les sections IV et V prennent la suite de ce que l'on a discuté jusqu'à présent. La section VI sera discutée de façon précise au chapitre suivant.

Il faut noter que certaines notations et conventions adoptées dans cet article ne correspondent pas à celles choisies dans la thèse. Ceci est dû à ce que nous avons voulu, dans cette thèse, nous conformer aux notations et conventions adoptées dans certains articles théoriques fondamentaux sur le Kicked Rotor [32, 104, 131, 132]. Nous rapportons dans la table 5.1 les changements de notation, puis de convention, qui ont une importance significative, par ordre d'apparition.



## Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves: Theory and Experiment

Gabriel Lemarié,<sup>1</sup> Julien Chabé,<sup>2,\*</sup> Pascal Szriftgiser,<sup>2</sup> Jean Claude Garreau,<sup>2</sup> Benoît Grémaud,<sup>1,3</sup> and Dominique Delande<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire Kastler Brossel, UPMC-Paris 6, ENS, CNRS; 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France*

<sup>2</sup>*Laboratoire PhLAM, Université de Lille 1, CNRS; CERLA; F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

<sup>3</sup>*Centre for Quantum Technologies, National University of Singapore, 3 Science Drive 2, Singapore 117543, Singapore*

(Dated: July 17, 2009)

Using a cold atomic gas exposed to laser pulses – a realization of the chaotic quasiperiodic kicked rotor with three incommensurate frequencies – we study experimentally and theoretically the Anderson metal-insulator transition in three dimensions. Sensitive measurements of the atomic wavefunction and the use of finite-size scaling techniques make it possible to unambiguously demonstrate the existence of a quantum phase transition and to measure its critical exponents. By taking proper account of systematic corrections to one-parameter scaling, we show the universality of the critical exponent  $\nu = 1.59 \pm 0.01$ , which is found to be equal to the one previously computed for the Anderson model.

PACS numbers: 03.75.-b, 72.15.Rn, 64.70.Tg, 05.45.Mt

### I. INTRODUCTION

The interplay between quantum effects and disorder is a subject actively studied for many decades, both theoretically and experimentally. It plays a particularly important role in condensed matter physics, where, in a first approximation, a crystal is modeled as independent electrons interacting with a perfectly periodic lattice. The pioneering works of Bloch and Zener [1, 2] showed however that most predictions based on this model are not verified in real crystals. For example, the Bloch theory predicts fully delocalized wavefunctions implying a ballistic transport of the electrons through the crystal. Moreover, in the presence of a constant bias potential, Zener predicted an oscillatory motion (the Bloch-Zener oscillations) due to quantum interference effects. This contradicts well-known experimental facts at least in usual conditions.

An obvious possible explanation of these contradictions is the fact that there are no perfect crystals: In a real crystal some sites may be randomly occupied by ions of a different nature, thus breaking the periodicity of the lattice. In 1958, Anderson considered this approach and postulated that the dominant effect of the disorder is to change randomly the on-site energy. Starting from this assumption, he constructed a simple model [3] of a single-electron interacting with a lattice in the tight-binding approximation:

$$H_{\text{tb}} = \sum_{jn} \epsilon_{jn} |jn\rangle \langle jn| + \sum_{jn,k\mu} V_{jn,k\mu} |jn\rangle \langle k\mu|. \quad (1)$$

Here  $\epsilon_{jn}$  are the energies associated with the states labeled by  $n$  at the sites  $j$  of the lattice, and the non-

diagonal elements  $V_{jn,k\mu}$  denote the matrix elements between these states. The diagonal part of the Hamiltonian corresponds to the potential energy and the non-diagonal part to the kinetic energy in a continuous space description. Disorder is introduced by giving the site energies  $\epsilon_{jn}$  a *random* distribution. Anderson thus showed that the electron wavefunctions can be *localized* by the disorder. This is naturally in sharp contrast with the prediction of the Bloch model.

The phenomenon of localization has its most striking manifestation in the transport properties of random media. If particle-particle interactions are negligible, exponentially localized states cannot contribute to transport at zero temperature since the coupling to phonons is negligible. Anderson localization as a consequence of the presence of disorder is one of the fundamental ingredients for the understanding of the existence of insulators and metals, and, in particular, the transition between the insulating and the metallic states of matter. An insulator is associated with localized states of the system while a metal generally displays diffusive transport associated with delocalized states.

It was later shown that the 3D Anderson model displayed a phase transition between a localized and a diffusive phase, the so-called Anderson metal-insulator transition: If the disorder is below a critical level, the localization disappears and one recovers a metallic (conductor) behavior [4]. The link between the disorder-induced metal-insulator transition and second-order phase-transitions was established by reformulating the problem in terms of the renormalization group [5, 6]. Based on Wegner's work and the ideas of Thouless and Landauer [5–7], it was possible to formulate the so-called *one-parameter scaling theory of localization* [8], one of the most fruitful approaches to the disorder-induced metal-insulator transition. The essential hypothesis of the scaling theory is that, close to the transition, a single relevant scaling variable describes the critical behavior.

---

\*Present address: Department of Physics, Ben-Gurion University P.O. Box 653 Be'er Sheva IL-84105 Israel

An essential result of the one-parameter scaling theory is that the Anderson transition exists only in dimensions larger than two. In one dimension, *all* electronic states are localized, whatever the degree of randomness. In two dimensions, they are all localized, but only marginally, i.e. with a localization length exponentially large (thus possibly much larger than the sample size) for weak disorder.

In analogy to standard second-order phase-transitions, the localization length  $\ell$  is assumed to diverge at criticality according to a power law:

$$\ell \sim (W - W_c)^{-\nu}, \quad (2)$$

with  $\nu$  the localization length critical exponent,  $W$  the disorder strength and  $W_c$  the critical disorder strength. The most important assumption of the theory, the one-parameter scaling hypothesis, was numerically validated using a finite-size scaling method developed in [9, 10]. This technique, which implements a real space renormalization, allowed to establish numerically the existence of a scaling function for the localization length. However, the critical exponents measured using this method,  $\nu \simeq 1.57$  [11, 12], were not compatible with the result  $\nu = 1$  obtained from a self-consistent approach of localization based on diagrammatic techniques, as developed in Ref. [13].

In the half-century since its birth, the Anderson model has become a paradigm for the studies of the interplay of quantum effects and disorder. Despite that, relatively few experimental results are available, for the following reasons: i) It is experimentally hard to finely tune the disorder in a real crystal; ii) the decoherence sources (collision with phonons, etc.) are difficult to master [14]; iii) electrons in a crystal present strong mutual interactions [14, 15] and iv) the wavefunction of the electrons in the crystal is not directly accessible, only transport properties can be directly measured [16].

It is thus interesting to search for other systems that display the Anderson transition, but are more favorable for experimental studies. Indeed, the concept of Anderson localization has progressively been extended from its original solid-state physics scope to a variety of systems where a wave propagates in a disordered medium for example electromagnetic radiation [17, 18] and sound waves [19–21]. Photons propagating in disordered materials revealed to be an excellent system to observe the effects of localization [17]. However, in such systems, there is always some absorption, whose signature can be quite similar to the signature of localization. Also, the measured quantity is the transmission, and the wavefunction itself is not accessible. The recent experimental observation of Anderson *localization* [22] using ultra-cold atomic matter waves has been done in a 1D situation where states are always localized and no metal-insulator *transition* exists.

A very interesting Anderson-type system is obtained by combining the Anderson model with another paradigmatic system, the kicked rotor (KR), which has been theoretically studied for almost three decades. This system

is well known to be classically chaotic [23], and chaos plays here the role of a “dynamical” disorder. In the quantum case, the KR displays a localization phenomenon, called “dynamical localization” [24] which is analogous to the 1D-Anderson localization [25]. Moreover, a quasi-periodic generalization of the kicked rotor, substantially equivalent to the 3D Anderson model, was numerically shown to display an Anderson-like phase transition [26]. Experimental studies of the quantum kicked rotor were boosted by the realization of such a system with laser-cooled atoms interacting with a standing wave by Raizen and co-workers, which observed, for the first time, the Anderson localization with matter waves [27].

In the present paper we describe in detail a realization of an atomic matter-wave system that allows us to observe the Anderson metal-insulator transition [28]. We report a full characterization of this phase transition which includes an experimental validation of the one parameter scaling hypothesis and the first non ambiguous experimental determination of the critical exponent  $\nu$ . Last but not least, we show numerically that the quantum chaotic system we consider has the *same* critical behavior as the true random 3D Anderson model. In particular, we show that the two models belong to the same universality class. Sec. II introduces the cold-atom realization of the periodic (standard) KR and its equivalence with the 1D Anderson model, as well as the quasi-periodic generalization of this system that is equivalent of the 3D-Anderson model. Sec. III describes the corresponding experimental setup, paying attention to its experimental limits (decoherence, stray effects, limited observation time). In sec. IV we report our direct experimental observation of the metal-insulator transition. In sec. V a scaling procedure is introduced that allows us to overcome experimental limitations and determine the critical exponent corresponding to the Anderson transition. Sec. VI is devoted to the universality of the critical behavior. Sec. VII concludes the paper.

## II. THE ATOMIC KICKED ROTOR AND ITS RELATION TO THE ANDERSON MODEL

### A. The atomic kicked rotor

Consider a two level atom interacting with a laser standing wave of frequency  $\omega_L = k_L c$  detuned by  $\Delta_L = \omega_L - \omega_0$  from the atomic transition of frequency  $\omega_0$ . It is well known that there are two kinds of interactions between the atom and the radiation: Firstly, the atom can absorb a photon from the laser and re-emit it spontaneously in a random direction. This is a dissipative process giving rise to radiation pressure force, whose rate is  $\Gamma \Omega^2 / 4 \Delta_L^2$  where  $\Gamma$  is the natural width and  $\Omega$  the resonant Rabi frequency (we assume  $|\Delta_L| \gg \Gamma$ ). Secondly, the atom can pick a photon in a laser mode and emit it in the same (or another) laser mode by stimulated emission. This conservative process is associated with a potential

acting on the atom's center of mass motion, called the optical or dipole potential. For a standing wave this potential is:

$$V_{\text{opt}} = \frac{\hbar\Omega^2}{8\Delta_L} \cos(2k_L X) \quad (3)$$

where  $X$  is the atom center of mass position along the standing wave. Clearly, this interaction is one dimensional, as momentum exchanges between the atom and the radiation are always along the standing wave: The atom absorbs a photon in one of the propagating beams and emits it in the counterpropagating beam, leading to a quantized momentum exchange of  $2\hbar k_L$  along the  $X$  axis. An important point is that the optical potential amplitude scales as  $\Omega^2/\Delta_L$  whereas the spontaneous emission rate scales as  $\Gamma\Omega^2/\Delta_L^2$ . In the regime  $|\Delta_L| \gg \Gamma$ , the optical potential is the dominant contribution to the dynamics, with spontaneous emission events being rare. Moreover, one can reduce the spontaneous emission rate by increasing the detuning  $\Delta_L$ , provided that the laser has enough power to keep the potential amplitude at the required level.

Suppose now that, instead of having the atom interacting continuously with the standing wave, one modulates the radiation intensity periodically (with period  $T_1$ ) so that it is on for a short time  $\tau$  (as compared to the atom dynamics) and off the rest of the period. One then obtains the Hamiltonian:

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{\hbar\Omega^2\tau}{8\Delta_L} \cos(2k_L X) \sum_n \delta_\tau(t' - nT_1) \quad (4)$$

where  $\delta_\tau(t) = 1/\tau$  if  $|t| \leq \tau/2$  and zero otherwise. This function tends to the Dirac  $\delta$ -function as  $\tau \rightarrow 0$ .

It is useful to introduce a set of scaled, dimensionless units:

$$\begin{aligned} x &= 2k_L X \\ p &= 2k_L T_1 P/M \\ t &= t'/T_1 \\ K &= \frac{\hbar\Omega^2 T_1 \tau k_L^2}{2M\Delta_L} \\ \hbar &= 4\hbar k_L^2 T_1/M \\ \mathcal{H} &= \frac{4k_L^2 T_1^2}{M} H \end{aligned} \quad (5)$$

In the limit of short pulses  $\tau \ll T_1$ , one then has:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + K \cos x \sum_n \delta(t - n) \quad (6)$$

which is precisely the Hamiltonian of the kicked rotor [23, 29]. One has thus realized an atomic kicked rotor [27]. The above Hamiltonian is associated with the Schrödinger equation:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi. \quad (7)$$

$\hbar$  plays the crucial role of an effective Planck constant, which can be adjusted at will by modifying e.g. the period  $T_1$ . As shown in the following, the most interesting physics takes place in the momentum. The scaling Eqs. (5) is such that  $P = 2\hbar k_L$  corresponds to  $p = \hbar$ . If the atom is cold enough that its typical momentum is comparable to  $2\hbar k_L$  (the “quantum” of momentum exchange), quantum effects can be observed in the system. Fortunately, magneto-optical traps produce atoms with a typical momentum of a few  $\hbar k_L$ . It is customary to measure the atomic momentum  $P$  in units of  $2\hbar k_L$ , i.e. measure  $p$  in units of  $\hbar$ . We thus will use:

$$p = \frac{p}{\hbar} = \frac{P}{2\hbar k_L}. \quad (8)$$

For  $K \gtrsim 5$ , the classical KR is fully chaotic, and the dynamics, although perfectly deterministic, behaves like a pseudo-random diffusive process known as “chaotic diffusion”. For this reason,  $K$  is usually called “stochasticity parameter”. The existence of classical chaos can be seen by integrating the classical equations of motion corresponding to Eq. (6) over a period, which leads to the so-called “Standard Map”:

$$x_{t+1} - x_t = p_t \quad (9)$$

$$p_{t+1} - p_t = K \sin x_{t+1}. \quad (10)$$

If the stochasticity parameter  $K$  is large enough,  $\sin x_t$  generates random numbers for successive  $t$  values. The momentum then performs a random (though deterministic) walk and the kinetic energy (averaged over the initial conditions) increases linearly with time. If – as we assume in the following – the initial state is a narrow momentum distribution centered around the origin  $p = 0$ , one obtains:

$$\langle p^2 \rangle(t) = Dt, \quad (11)$$

with  $D \approx K^2/2\hbar^2$  being the diffusion constant.

In the quantum case, a chaotic diffusion is observed for times shorter than a characteristic “localization time”  $\tau_{\text{loc}} = D/2$ , after which quantum interferences build-up in the system that eventually “freeze” the dynamics, suppressing the diffusion. The mean kinetic energy then tends to a constant  $\langle p^2 \rangle(t \rightarrow \infty) \rightarrow 2\ell^2$  with  $\ell \approx K^2/4\hbar^2$  [30]. At the same time, the momentum distribution changes from a Gaussian shape characteristic of a diffusive process to a localized, exponential shape  $\approx \exp(-|p|/\ell)$ . This phenomenon is called “dynamical localization” (DL), “dynamical” meaning that the localization takes place in momentum space. In fact, as shown below, DL is intimately related to the Anderson localization, with, however, an important difference: DL takes place in *momentum* space, whereas Anderson localization is in *real* space.

### B. Equivalence with the 1D-Anderson model

Let us consider the KR quantum dynamics. From a stroboscopic point of view, the motion is determined by the evolution operator over one period:

$$U = e^{-iK \cos x/k} e^{-ip^2/2k}, \quad (12)$$

whose eigenstates form a basis set allowing to calculate the temporal evolution. These *Floquet states*  $|\phi\rangle$  are fully characterized by their quasienergy  $\omega$ , defined modulo  $2\pi$ :

$$U|\phi_\omega\rangle = e^{-i\omega}|\phi_\omega\rangle. \quad (13)$$

The Hamiltonian, Eq. (6), is  $2\pi$ -periodic in position  $x$ , and so is the evolution operator, Eq. (12). The Bloch theorem tells us that a Floquet eigenstate is a product of a periodic function of  $x$  by a plane wave  $\exp i\beta x$  with  $0 \leq \beta < 1$ , is a constant,  $\beta k$  being usually called the “quasi-momentum”. A trivial transformation shows that one can equivalently consider periodic functions of  $x$  governed by the Hamiltonian, Eq. (6), where  $p$  is replaced by  $p + \beta k$ . In the following discussion, we will omit for simplicity the quasi-momentum, although it is straightforward to take it into account. Note that in all numerical simulations shown hereafter, we perform an averaging over the quasi-momentum, to follow the experimental conditions where an incoherent sum of all quasi-momenta is prepared.

At this point, contact with a 1D Anderson tight-binding model can be made by reformulating Eq. (13) for the Floquet states [25]. Firstly, we rewrite the (unitary) kick operator:

$$e^{-iK \cos x/k} = \frac{1 + iW(x)}{1 - iW(x)}, \quad (14)$$

with

$$W(x) = \tan(K \cos x/2k). \quad (15)$$

The periodic function  $W(x)$  can be expanded in a Fourier series:

$$W(x) = \sum_r W_r e^{irx}. \quad (16)$$

Similarly, for the kinetic part, one gets:

$$e^{-i(p^2/2k - \omega)} = \frac{1 + iV}{1 - iV}, \quad (17)$$

with  $V$  diagonal in the momentum eigenbasis  $|m\rangle \equiv |p = km\rangle$ . Secondly, we make the following expansion in the momentum eigenbasis:

$$\frac{1}{1 - iW(x)}|\phi_\omega\rangle = \sum_m \Phi_m |m\rangle. \quad (18)$$

Then, the eigen-equation for the Floquet state can be rewritten:

$$\epsilon_m \Phi_m + \sum_{r \neq 0} W_r \Phi_{m-r} = -W_0 \Phi_m, \quad (19)$$

with  $\epsilon_m = \tan[\frac{1}{2}(\omega - m^2 k/2)]$  [31].

This is the equation for a tight-binding model with hopping elements  $W_r$  to the  $r^{\text{th}}$  neighbor, with eigenenergy  $W_0$ , and with on-site energy  $\epsilon_m$ . The hopping elements are not restricted to nearest-neighbors, but they decrease exponentially with  $r$  [32]. In the original Anderson model, a random distribution is assigned to  $\epsilon_m$ . Here, the sequence  $\epsilon_m$ , although not satisfying the most stringent mathematical tests of randomness, is nevertheless pseudo-random. These two conditions are sufficient for the Anderson localization to take place. The hopping integrals  $W_r$  increase with the kick strength  $K$ , which thus plays the role of a control parameter in the Anderson model (19). Note that if  $k$  is a rational multiple of  $2\pi$ , the  $\epsilon_m$  are periodic in  $m$ . This leads to the quantum resonances of the kicked rotor, where the states are extended.

When  $k$  is incommensurate with  $2\pi$ , the Floquet states are found to be exponentially localized, and this property accounts for dynamical localization. As shown in [33], the localization length observed at long times for a wavepacket is essentially identical to the localization length of individual Floquet states.

Many references discuss the detailed correspondence between quantum behavior of this dynamical system and Anderson localization: In Ref. [34] an analogy between the KR and band random matrices was pointed out; the latter have been reduced to a 1D nonlinear  $\sigma$  model [35] similar to those employed in the localization theory [36]. In Ref. [37] the direct correspondence between the KR and the diffusive supersymmetric nonlinear  $\sigma$  model was demonstrated. A diagrammatic approach [38] to the dynamical localization in the Kicked Rotor was reported in [39].

### C. The quasi-periodic Kicked Rotor and its analogy to the 3D-Anderson model

As the Anderson transition exists only in three (or more) dimensions, one must generalize the KR to obtain a system analogous to a 3D Anderson model.

Different generalizations of the KR have been theoretically considered as analogs of the 3D-Anderson model [40, 41]. Here we use the convenient three-incommensurate-frequencies generalization introduced in Refs. [42, 43]:

$$\mathcal{H}_{\text{qp}} = \frac{p^2}{2} + \mathcal{K}(t) \cos x \sum_n \delta(t - n), \quad (20)$$

obtained simply by modulating the amplitude of the standing wave pulses with two new frequencies  $\omega_2$  and  $\omega_3$ :

$$\mathcal{K}(t) = K [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \cos(\omega_3 t + \varphi_3)]. \quad (21)$$

One can legitimately ask: where is the three dimensional aspect in the latter Hamiltonian? An answer can be given

by drawing a formal analogy between the quasiperiodic kicked rotor and a 3D kicked rotor with an initial condition taken as “plane source” (see below).

We start from the Hamiltonian of a 3D periodically kicked rotor:

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + K \cos x_1 [1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3] \sum_n \delta(t - n), \quad (22)$$

let us consider the evolution of a wavefunction  $\Psi$  with the initial condition:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, t=0) \equiv \Xi(x_1, t=0) \delta(x_2 - \varphi_2) \delta(x_3 - \varphi_3) \quad (23)$$

The initial state being perfectly localized in  $x_2$  and  $x_3$ , it is entirely delocalized in the conjugate momenta  $p_2$

and  $p_3$ , and can thus be seen as a “plane source” [44] in momentum space.

From a stroboscopic point of view, the time-evolution of  $\Psi$  is determined by the evolution operator over one period:

$$\mathcal{U} = e^{-iK \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3)/\hbar} \times e^{-i(p_1^2/2 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3)/\hbar}. \quad (24)$$

It is then straightforward to see that the 3D-wave function  $\Psi$  at time  $t$  is related to its initial condition as:

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2, x_3, t) &= \mathcal{U}^t \Psi(x_1, x_2, x_3, t=0) \\ &= \Xi(x_1, t) \delta(x_2 - \varphi_2 - \omega_2 t) \delta(x_3 - \varphi_3 - \omega_3 t), \end{aligned} \quad (25)$$

with:

$$\Xi(x_1, t) \equiv \prod_{t'=1}^t e^{-iK \cos x_1 [1 + \varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t') \cos(\varphi_3 + \omega_3 t')]/\hbar} e^{-ip_1^2/2\hbar} \Xi(x_1, t=0). \quad (26)$$

On the other hand, consider now the evolution of an initial wave function  $\psi(x, t=0)$  with the Hamiltonian  $H_{\text{qp}}$  of the quasiperiodic kicked rotor. It is also determined by an evolution operator from kick to kick, but now this evolution operator  $U_{\text{qp}}(t; t-1)$  depends on time, since the Hamiltonian  $H_{\text{qp}}$ , Eq. (20), is not time-periodic:

$$U_{\text{qp}}(t; t-1) = e^{-iK \cos x [1 + \varepsilon \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) \cos(\varphi_3 + \omega_3 t)]/\hbar} e^{-ip^2/2\hbar}. \quad (27)$$

The wave-function  $\psi(t)$  at time  $t$  is obtained by applying successively  $U_{\text{qp}}(t'; t'-1)$  for  $t'$  from 1 to  $t$ :

$$\psi(x, t) = \prod_{t'=1}^t U_{\text{qp}}(t'; t'-1) \psi(x, t=0). \quad (28)$$

From Eqs. (25), (27), (26) and (28), it follows that  $\psi(x, t)$  and  $\Xi(x_1, t)$  follow exactly the same evolution. Consequently, the dynamics of the quasiperiodic kicked rotor is *strictly* equivalent to that of a 3D kicked rotor with a plane source. Our experiment with the quasiperiodic kicked rotor can be seen as a localization experiment in a 3D disordered system, where localization is actually observed in the direction perpendicular to the plane source [21]. In other words, the situation is thus comparable to a transmission experiment where the sample is illuminated by a plane wave and the exponential localization is only measured along the wave vector direction. Therefore, the behavior of the wave function  $\psi$  subjected to the quasiperiodic kicked rotor Hamiltonian  $H_{\text{qp}}$ , Eq. (20), depicts *all* the properties of the dynamics of the quantum 3D kicked rotor, Eq. (22).

The Hamiltonian  $\mathcal{H}$ , Eq. (22), is invariant under the following transformation, product of time-reversal with parity:

$$T : t \rightarrow -t, \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}, \quad (29)$$

which is relevant for dynamical localization [45, 46]. The evolution of the states according to the Hamiltonian, Eq. (20), is governed by the operator  $\mathcal{U}$ , Eq. (24), which belongs to the Circular Orthogonal Ensemble class [47, 48], with the additional constraint at  $t=0$  Eq. (23). Of course, the transformation (29) amounts to changing  $(\varphi_2, \varphi_3)$  to  $(-\varphi_2, -\varphi_3)$  into the constraint (23), i.e. to starting from a different wavefunction. On the other hand, from Eq. (25), one clearly sees that after  $t$  steps, the constraint reads  $\delta(x_2 - \tilde{\varphi}_2) \delta(x_3 - \tilde{\varphi}_3)$ , with

$$\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 + \omega_2 t \quad \tilde{\varphi}_3 = \varphi_3 + \omega_3 t. \quad (30)$$

Since the frequencies  $\omega_2$  and  $\omega_3$  are incommensurate, the preceding equation immediately tells us that, along the time evolution, the constraint on the wavefunction can be arbitrary close to any phases  $(\varphi'_2, \varphi'_3)$  [49]. This way, the time evolution results in an average over (almost) all possible phases, showing thus that the localization properties are independent of a particular choice  $(\varphi_2, \varphi_3)$ , but only depend on the operator  $\mathcal{U}$ . Therefore, the dynamical properties of the present quasiperiodic kicked rotor also belong to the orthogonal ensemble.

It should be noted that the 3D aspect comes from the presence of 3 frequencies in the dynamical system: the usual “momentum frequency”  $\hbar$  present in the standard



kicked rotor Eq. (6), and two additional time-frequencies  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . Thus, increasing the number of incommensurate frequencies allows one to tune the effective dimensionality of the system.

Let us now consider the conditions for the observation of Anderson localization with the quasiperiodic kicked rotor. As for the standard kicked rotor, the Floquet states of the time-periodic 3D Hamiltonian  $\mathcal{H}$ , Eq. (22), can be mapped onto a 3D Anderson-like model:

$$\epsilon_{\mathbf{m}}\Phi_{\mathbf{m}} + \sum_{\mathbf{r} \neq 0} W_{\mathbf{r}}\Phi_{\mathbf{m}-\mathbf{r}} = -W_0\Phi_{\mathbf{m}}, \quad (31)$$

where  $\mathbf{m} \equiv (m_1, m_2, m_3)$  and  $\mathbf{r}$  label sites in a 3D cubic lattice, the on-site energy  $\epsilon_{\mathbf{m}}$  is

$$\epsilon_{\mathbf{m}} = \tan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \omega - \left( k \frac{m_1^2}{2} + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 \right) \right] \right\}, \quad (32)$$

and the hopping amplitudes  $W_{\mathbf{r}}$  are coefficients of a three-fold Fourier expansion of

$$W(x_1, x_2, x_3) = \tan [K \cos x_1 (1 + \varepsilon \cos x_2 \cos x_3) / 2k]. \quad (33)$$

An obvious necessary condition for the observation of localization effects is that  $\epsilon_{\mathbf{m}}$  is not periodic. This is achieved if  $(k, \omega_2, \omega_3, \pi)$  are incommensurate. Of course, the presence of *disorder* in the diagonal energy  $\epsilon_{\mathbf{m}}$  is crucial to observe Anderson localization. When  $k$  is incommensurate with  $2\pi$ , due to the presence of a nonlinear dispersion in the  $m_1$  direction, the classical dynamics can become chaotic with diffusive spreading in *all*  $\mathbf{m}$  directions [42, 50]. A typical numerical simulation is shown in Fig. 1: the classical motion is almost perfectly diffusive along the three  $p_i$  coordinates with a characteristic Gaussian shape in each direction. From Eq. (33), it is clear that hopping along the directions "2" and "3" is diminished by a factor  $\varepsilon$  compared to hopping along direction "1". Not surprisingly, diffusion along  $p_1$  is slightly faster than along  $p_2$  and  $p_3$ . The quasi-periodically kicked rotor is thus analogous to an anisotropic Anderson model [51–53].

When those conditions are verified, localization effects as predicted for the 3D Anderson model are expected, namely either a diffusive or a localized regime. Localized states would be observed if the disorder strength is large as compared to the hopping. In the case of the model Eq. (31), the amplitude of the disorder is fixed, but the hopping amplitudes can be controlled by changing the stochasticity parameter  $K$  (and/or the modulation amplitude  $\varepsilon$ ):  $W_{\mathbf{r}}$  is easily seen to increase with  $K$ . In other words, the larger  $K$ , the smaller the disorder. One thus expects to observe diffusive regime for large stochasticity or/and modulation amplitude (small disorder) and localized regime for small  $K$  or/and  $\varepsilon$  (large disorder). It should be emphasized that there is no *stricto sensu* mobility edge in our system. Depending on the values of the parameters  $K, k, \varepsilon, \omega_2, \omega_3$ , all Floquet states are localized or all are delocalized. The boundary of the metal-insulator transition is in the  $K, k, \varepsilon, \omega_2, \omega_3$  space. As seen below,  $K$  and  $\varepsilon$  are the primarily important parameters.

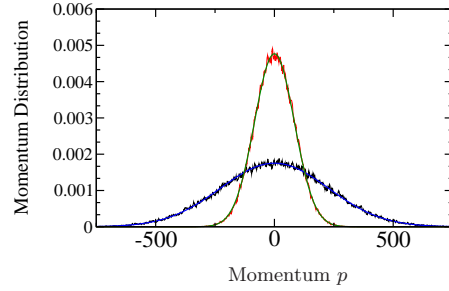


Figure 1: (Color on line) Classical diffusive motion for the 3D kicked rotor Eq. 22. The initial state is localized around the origin. After 1000 kicks, the classical momentum distribution (black and red curves) has the Gaussian shape characteristic of a diffusive motion. The blue and green curves are fits by a Gaussian which do not show any statistically significant deviation. The black (resp. red) curve is the momentum distribution along  $p_1$  (resp.  $p_2$ ). The distribution along  $p_3$  is identical that along  $p_2$ . The anisotropic diffusion happens because the hopping along the directions "2" and "3" is diminished by a factor  $\varepsilon$  compared to hopping along direction "1". Parameters are  $K = 10$ ,  $k = 2.85$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\omega_2/2\pi = \sqrt{5}$ ,  $\omega_3/2\pi = \sqrt{13}$ .

In an analytical work on a similar problem [49] Basko *et al.* showed that the weak dynamical localization regime of a  $d$ -frequency quantum dot system is similar to the weak localization in a  $d$ -dimensional Anderson model. This work confirms the equivalence between our system and the 3D-Anderson model. The above arguments were also validated numerically [42, 50].

Numerical simulations of the evolution of the quasi-periodically kicked rotor are straightforward. The free evolution between consecutive pulses is diagonal in momentum representation, while the kick operator is diagonal in position representation (whatever the kick strength, constant or quasi-periodic). Switching between momentum and position representation is easily done through a Fast Fourier Transform. We are thus able to compute the evolution of a large number of initial states (typically one thousand) over a very long time (typically up to one million kicks, much more than in the experiment). All numerical results shown below have been carefully checked for convergence. Except when explicitly stated, averaging over the quasi-momentum  $\beta$  has been performed, in accordance with the experimental realization.

### III. EXPERIMENTAL REALIZATION WITH ATOMIC MATTER-WAVES

#### A. Experimental setup

Our experimental setup has been described in detail in previous publications [54–57] and was used in vari-

ous investigations on the quasiperiodic kicked rotor [58–61]. Briefly, our experiments are performed with cesium atoms produced in a standard magneto-optical trap (MOT). A long Sisyphus-molasses phase (25 ms) allows us to obtain  $10^7$  atoms at a measured temperature of  $3.2 \mu\text{K}$ . The velocity distribution of the atoms is well modeled by an incoherent sum of plane waves forming a Gaussian of full width at half maximum (FWHM) equal to  $8\hbar k_L$ , which is much narrower than the expected localization length. The MOT beams and magnetic field are turned off and the sequence of kicks is applied to the atoms. The beam forming the standing wave passes through an acousto-optical modulator driven by RF pulse synthesizers, which generates the kicks at a typical frequency of  $1/T_1 = 36 \text{ kHz}$  (which corresponds to  $k = 2.89$ ), of duration  $\tau = 900 \text{ ns}$  and with a raising time of  $50 \text{ ns}$ . The modulation is thus an almost perfect square, at the time scale of the atomic motion, and its duration and period can be set by a microcomputer. The beam is then injected in an optical fiber that brings it to the interaction region, and the standing wave is obtained simply by back-reflection of this beam. The standing wave has a typical power  $160 \text{ mW}$ , its profile intensity has a FWHM of  $1.5 \text{ mm}$ , and it is far off-resonant ( $7.3 \text{ GHz}$  to red, or  $1.4 \times 10^3 \Gamma$ ), in order to reduce spontaneous emission. The corresponding stochasticity parameter is  $K \approx 15$ .

A very interesting property of our system (as compared to solid-state systems) is that the wave function is accessible (or at least its square modulus). We measure the atomic velocity distribution by velocity-selective Raman stimulated transitions, which are sensitive to the atomic velocity via Doppler effect, allowing an optimal velocity resolution of about  $2 \text{ mm/s}$ . A Raman pulse detuned of  $\delta_R$  with respect to the Raman resonance transfers the atoms in the velocity class  $v = \delta_R/(2k_R) - v_R$  with  $v_R = \hbar k_R/M$  ( $k_R$  is the wave number of the Raman beams) from the  $F_g = 4$  to the  $F_g = 3$  ground-state hyperfine sublevel. A beam resonant with the  $F_g = 4 \rightarrow F_e = 5$  transition is then applied to push the remaining atoms out of the interaction region. The  $F_g = 3$  atoms are then optically pumped to the  $F_g = 4$  sublevel and interact with a resonant probe beam: The absorption signal is thus proportional to the population of the  $F_g = 4$  level, thus to the population of the selected velocity class. The whole sequence then starts again with a different value of the Raman detuning to probe a new velocity class, allowing a reconstruction of the velocity distribution [55, 57].

## B. Decoherence sources

Any quantum experiment must consider decoherence sources that destroy quantum interference effects (in our case, localization) reestablishing a diffusive dynamics. The most important sources of decoherence in our experiment are (i) atomic collisions, (ii) spontaneous emission,

and (iii) the deviation of the standing wave from strict horizontality.

For an isolated system described by a single wavefunction, phase coherence between different positions is “perfect”. When the system is weakly coupled to an external bath, it cannot be any longer described by a single wavefunction; the most convenient description usually involves a density matrix  $\rho$ . Non-diagonal matrix elements of the type  $\langle x|\rho|x' \rangle$  quantify the degree of coherence of the system between position  $x$  and  $x'$ . As a general rule, the effect of the external bath is to make the non-diagonal elements of the density matrix to decay relatively rapidly, more rapidly than the diagonal elements: this is decoherence (not to be confused with dissipation) [62]. Effects like Anderson localization are due to subtle destructive interference amongst various components of the wavefunction, which inhibit the classically allowed transport: they are thus very sensitive to decoherence. One usually quantify the strength of decoherence effects by defining a phase coherence time, the characteristic time over which the non-diagonal elements of the density matrix decay because of coupling to the external bath. In our case, the non-diagonal element of interest are between eigenstates  $|p\rangle$  and  $|p'\rangle$  located at a typical distance  $|p - p'|$  comparable to the localization length in momentum space.

Localization effects can be observed only for times shorter than the phase coherence time [63]. Beyond the phase coherence time, interference effects are killed and classical-like diffusive dynamics sets in. In the following, we shall express the characteristic times of the decoherence processes (i), (ii) and (iii), as functions of the experimental parameters to show that they can be set large enough for localization effects to be observable.

In atom-atom collisions, the dominant effect is that of collisions between cold atoms, the density of the cloud being around 8 orders of magnitude larger than the density of the background hot gas. A cloud density of  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  with a mean velocity  $1 \text{ cm/s}$  and a collision cross-section of  $6 \times 10^{-11} \text{ cm}^2$  gives a collision rate of  $\approx 60 \text{ s}^{-1}$ , or  $1.6 \times 10^{-3}$  per kick; the collision phase coherence time is thus  $\sim 600$  kicks.

In order to have a better idea of the decoherence effect induced by spontaneous emission, let us consider the temporal evolution of an initial plane-wave function:  $\psi(p, t=0) = \delta(p - p_0)$  evolving with the KR Hamiltonian Eq. (6). After dynamical localization sets in, the momentum distribution ceases to expand because of destructive interference between the various components of the wavefunction. Spontaneous emission brings a random recoil to the atomic momentum which is not an integer multiple of  $2\hbar k_L$ . Thus, the quasi-momentum  $\beta$  performs a random jump. As the phase factors involved in the free evolution depend on the quasi-momentum, the relative phases between interfering paths are scrambled, resulting in a new transient diffusive behavior for another duration of  $\tau_{\text{oc}}$ . DL is thus expected to be destroyed if spontaneous emission is regularly repeated. Note that a single spontaneous emission event completely breaks the

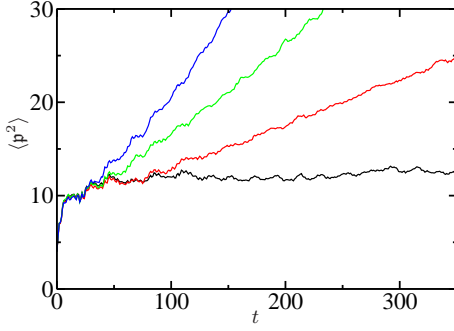


Figure 2: (Color online) Gravity effects on a slightly inclined kicked rotor Eq. (34). The deviation of the standing wave from horizontality is  $\alpha = 0^\circ$  (black lower curve),  $\alpha = 0.1^\circ$  (red lower middle curve),  $\alpha = 0.4^\circ$  (green upper middle curve) and  $\alpha = 1^\circ$  (blue upper curve). The stochasticity parameter is taken as  $K = 5$  and the effective Planck constant is  $\hbar k = 2.85$ . The dynamics of an initial thermal state is simulated and the corresponding mean kinetic energy is plotted versus time. For angles larger than  $0.1^\circ$ , the slow drift of momentum induces a diffusive behavior clearly visible on the time-scale of the experiment.

phase coherence, implying that the phase coherence time is simply the inverse of the spontaneous emission rate.

Spontaneous emission tends to reestablish a diffusive evolution with a diffusion constant that is roughly  $\eta \hbar k^2$  where  $\eta = \Gamma \Omega^2 \tau / 8 \Delta_L^2$ , is the spontaneous emission rate expressed in photons per kick, which can be cast in the more useful form  $\eta = (\Gamma \tau / 8) (I / I_s) (\Gamma / \Delta_L)^2$ , where  $I$  is the intensity and  $I_s \approx 2.2 \text{ mW/cm}^2$  is the transition saturation intensity. Around the transition ( $K \approx 6$ ), the experimental values indicated above give  $\eta \approx 2.1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , or a typical phase coherence time of  $\sim 500$  kicks.

Another effect leading to the destruction of localization is the standing wave deviation from horizontality. In this case, a gravity term must be added in the Hamiltonian (6):

$$H_g = \frac{p^2}{2} - \eta_g x + K \cos x \sum_n \delta(t - n), \quad (34)$$

The dimensionless gravity term  $\eta_g$  is:

$$\eta_g = \frac{mgT_1}{2\hbar k_L} \hbar k \sin \alpha, \quad (35)$$

with  $g$  the gravity acceleration and  $\alpha$  the angle between the horizontal direction and the standing wave. The physical interpretation is quite clear:  $mgT_1 \sin \alpha$  is the additional momentum transferred to the atoms between two consecutive kicks, which must be compared to the width of the Brillouin zone  $2\hbar k_L$ .

The gravity term  $-\eta_g x$  breaks the spatial periodicity of the Hamiltonian, and consequently the conservation of the quasi-momentum  $\beta \hbar k$ . It actually produces a

drift of the quasi-momentum at constant rate  $-\eta_g$ , whose effect is to break dynamical localization. Indeed, the destructive interference between various components of the momentum wavefunction – responsible for dynamical localization – is partially destroyed by the quasi-momentum drift, as the various phase factors accumulated during the free evolution between two consecutive kicks,  $\exp[-i(m + \beta \hbar k)^2 / 2\hbar k]$  also drift. The net result is a residual diffusion constant, depending on  $\eta_g$ . Although this is not strictly a decoherence effect (the whole evolution is fully phase coherent), it similarly destroys dynamical localization. We thus define the phase coherence time  $\tau_g$  as the time needed to double  $\langle p^2 \rangle$  compared to the dynamically localized situation. Numerical simulations taking into account the gravity effect confirm the discussion above, see Fig. 2. If the standing wave deviates from horizontality by an angle  $\alpha = 1^\circ$ , then  $\tau_g \approx 120$  kicks whereas when the angle  $\alpha = 0.1^\circ$ ,  $\tau_g \approx 350$  kicks. In the timescale of the experiment (150 kicks), the deviation from horizontality must be less than  $0.1^\circ$ . This decoherence effect is rather important. To the best of our knowledge, its importance was not fully appreciated in previous experiments. A detailed discussion of this effect will be presented elsewhere [64].

### C. Conditions for the observation of localization effects

We now discuss the conditions that must be satisfied in order to observe localization effects experimentally.

Firstly, the system must present some kind of disorder: As discussed in section II C, this means that  $\hbar k$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$  and  $\pi$  must be incommensurate. This is achieved if we take  $\hbar k = 2.89$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  and  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ . A more detailed discussion concerning the choice of these parameters will be given in section VI B.

Secondly, in order to observe dynamical localization effects instead of trivial classical localization, we must be in a regime where the classical system has no KAM barriers which can prevent the classical diffusive transport. For the standard, periodic KR, full chaos is obtained for  $K \gtrsim 4$ . In order to determine the corresponding threshold for the quasiperiodic system, we performed numerical simulations of the classical dynamics corresponding to Eq. (22), for various values of the stochasticity parameter. The dynamics is found to be fully diffusive for  $K \gtrsim 2$ , a considerably smaller value than for the standard KR. In particular, no classical localization effects due to KAM barriers are observed for  $K \gtrsim 2$ . In any case, the experiments and the numerical simulations in the following are all performed for  $K > 4$ , where the classical dynamics is diffusive, see Fig. 3.

Thirdly, short enough pulses must be used that they can be considered as delta pulses [65]. Numerical simulations of the quasiperiodic kicked rotor with a finite pulse duration  $\tau = 0.9 \mu\text{s}$  and a thermal initial momentum distribution show that less than 1% of the atoms are



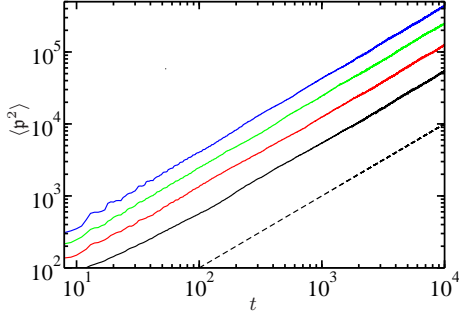


Figure 3: Classical chaotic diffusion for the quasiperiodic kicked rotor Eq. (22). The dynamics of an initial thermal distribution of classical particles is simulated and the corresponding mean kinetic energy is plotted versus time (number of kicks). The stochasticity parameter  $K$  (the modulation amplitude  $\epsilon$ ) varies linearly between 4 and 9 (0.1 and 0.8), following the experimental path, Fig. 6. The dashed line of slope 1 demonstrates the linear increase of  $\langle p^2 \rangle$  vs. time  $t$ . No classical localization effects are observed. The chaotic diffusion is characteristic of the presence of pseudo-disorder in the quasiperiodic kicked rotor, leading to a pseudo-random walk in momentum space.

sensitive to the duration of the pulses. Only atoms in the tails of the momentum distribution have sufficiently large atomic velocity to move by a significant fraction of  $\lambda_L$  during the pulse, thus feeling a smaller effective kick.

Fourthly, a sufficiently narrow initial state must be prepared in order to observe dynamical localization, i.e. the freezing of the initial diffusive expansion of the wavefunction into an exponentially localized state. A sufficient condition is that the initial width of the momentum distribution be smaller than the localization length. In our system, we have an initial momentum distribution of half-width  $2k$ . This is comparable to the shortest localization length at the lowest  $K = 4$  value, as experimentally proved, see inset of Fig. 5. A consequence is that, in this regime, the exponential shape of the wavefunction after dynamical localization is established is slightly rounded at the tip. For higher values – say  $K > 5$ , – the initial width of the atomic wavefunction can be safely neglected.

Finally, decoherence processes must be kept small during the experiment. The large detuning of the standing wave allows to keep the spontaneous emission rate very small, i.e. the corresponding phase-coherence large as compared to the duration of the experiment. A good control on the horizontality of the standing wave insures that gravity do not lead to a destruction of localization effects on the time-scale of the experiment.

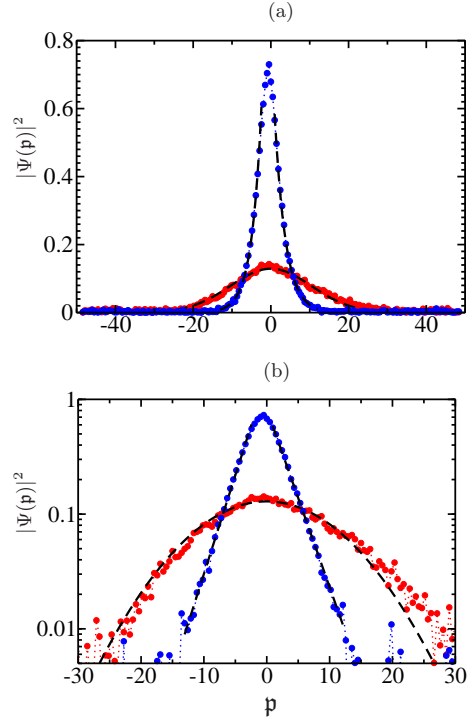


Figure 4: (Color online) Experimentally measured momentum distributions after 150 kicks, exponentially localized in the insulator region (blue) and Gaussian in the diffusive (metallic) region (red). (a) linear scale, (b) log scale. For both curves  $k = 2.89$ , for the localized distribution (blue)  $K = 5.0$  and  $\epsilon = 0.24$ , for the Gaussian distribution (red)  $K = 9.0$  and  $\epsilon = 0.8$ .

#### IV. EXPERIMENTAL OBSERVATION OF THE DISORDER INDUCED METAL-INSULATOR TRANSITION

In a typical experimental run, we apply a sequence of kicks to the atomic cloud and measure its dynamics. In the localized regime, the evolution of its momentum distribution is “frozen” after the localization time (typically of the order of 12 kicks at low  $K$ ) into an exponential curve  $\exp(-|p|/\ell)$ . In the diffusive regime, the initial Gaussian shape is preserved and the distribution gets broader as kicks are applied, corresponding to a linear increase of the average kinetic energy. Figure 4 shows the experimentally observed momentum distributions, an exponentially localized distribution for small  $K$  and  $\epsilon$  (blue curve), characteristic of dynamical localization, and a broad, Gaussian-shaped distribution for large  $K$  and  $\epsilon$  (red curve), characteristic of the diffusive regime.

Measuring the whole momentum distribution takes too much time: one must repeat the whole sequence (from the preparation of a new atom cloud up to the Raman

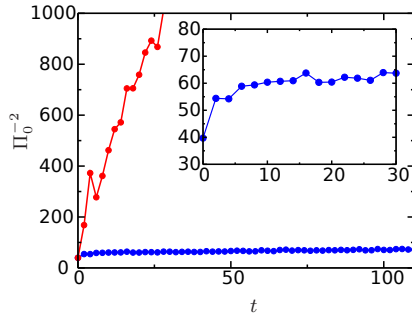


Figure 5: (Color online) Temporal dynamics of the quasi-periodic kicked rotor. We experimentally measure the population  $\Pi_0(t)$  of the zero-momentum class as a function of time (number of kicks) and plot the quantity  $\Pi_0^{-2}(t) \propto \langle p^2 \rangle(t)$ . Clearly, it tends to a constant in the localized regime (blue lower curve corresponding to  $K = 4$  and  $\epsilon = 0.1$ ) and increases linearly with time in the diffusive regime (red upper curve corresponding to  $K = 9$  and  $\epsilon = 0.8$ ). The inset shows the behavior close to the localization time.  $\hbar = 2.89$ .

measurement of the velocity distribution) for each velocity class. Moreover, for each time step, a complete momentum distribution must be measured. Fortunately, it is sufficient, and much easier, to measure the population  $\Pi_0(t)$  of the zero velocity class, as  $\Pi_0^{-2}(t)$  is proportional to  $\langle p^2 \rangle(t)$  (the total number of atoms is constant). The proportionality factor between  $\Pi_0^{-2}(t)$  and  $\langle p^2 \rangle(t)$  depends on the detailed shape of the momentum distribution and is thus different in the localized and diffusive regime, but this small difference is a small correction to the main phenomenon: divergence of the localization length near the transition.

Note that, strictly speaking, the proportionality between  $\Pi_0^{-2}(t)$  and  $\langle p^2 \rangle(t)$  breaks at criticality due to the multifractal character of critical states [66]. However, on the time scale of the experiment ( $t = 150$  kicks), the deviation from strict proportionality is seen (numerically) to be negligible. At longer times (thousands or millions of kicks), the effect of multifractality is visible and quantitatively measurable. This is beyond the scope of this paper and will be analyzed elsewhere [67].

For each run, a value of  $\Pi_0(t)$  is recorded after a given number of kicks is applied, then the measurement sequence starts again with the next number of kicks. We also record the background signal obtained by not applying the Raman detection sequence, and the total number of atoms in the cold-atom cloud. These signals are used to correct the experimental data from background signals and long-term drifts of the cloud population.

Figure 5 shows the experimentally measured  $\Pi_0^{-2}(t)$  in the localized and diffusive regimes. It clearly shows the initial diffusive phase and the freezing of the quantum dynamics in the localized regime (blue curve in Fig. 5). Along with the observation of an exponential localization

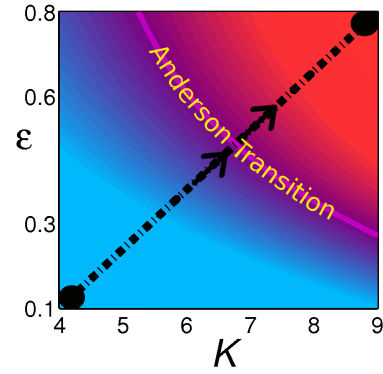


Figure 6: (Color online) Phase diagram of the quasiperiodic kicked rotor, from numerical simulations. The localized (insulator) region is shown in blue, the diffusive (metallic) region is shown in red. The experimental parameters are swept along the diagonal dash-dotted line.

of the wave-function in Fig. 4, this constitutes a clear-cut proof of the observation of dynamical localization. In the diffusive regime,  $\Pi_0^{-2}(t)$  is seen to increase linearly with time (red curve in Fig. 5), corresponding to the Gaussian red curve in Fig. 4.

After having observed Anderson localization for strong effective disorder strength and diffusive transport for small effective disorder, the next step is to walk the way between these two regimes, and explore the phase transition expected (numerically) to take place along a critical line in the plane  $(K, \epsilon > 0)$  (Fig. 6). In order to confine the transition to a narrow range of parameters, we choose a path that cross the critical curve (Fig. 6) “at a right angle”; we thus vary simultaneously  $K$  and  $\epsilon$  along a line going from  $K = 4$ ,  $\epsilon = 0.1$  in the localized region to  $K = 9$ ,  $\epsilon = 0.8$  in the diffusive region; the critical line is then crossed at  $K = K_c = 6.6$ .

A simple way to investigate the phase transition is the following [42]. In the localized regime, wait for a time longer than the localization time so that a localized frozen wave-function is observed, then measure its localization length. One can in such a way study the behavior of the localization length vs. disorder: at criticality, it should diverge as  $\ell \sim (K - K_c)^{-\nu}$ . This would give the critical stochasticity parameter  $K_c$  and the critical exponent  $\nu$ . However, we cannot proceed that way in our case, because when one approaches the critical point from the insulator side, the localization time diverges as  $\tau_\ell \sim \ell^3 \sim (K - K_c)^{-3\nu}$  in three dimensions (see below). In our system, a localized momentum distribution would be observable in the vicinity of the transition only for prohibitively large numbers of kicks, which are, in practice, limited to 150, essentially because of decoherence effects and because the free fall of the atom cloud takes it out of the standing wave. Consequently, it is vain to investigate experimentally the Anderson transition only

from *static* properties such as the divergence of the localization length at criticality, which could be obtained only for  $t \gg \tau_{\text{loc}}$ . Fortunately, there is another way to observe the Anderson transition, which we shall present in the following sections.

## V. CHARACTERIZATION OF THE ANDERSON PHASE-TRANSITION

Finite-time effects act as finite-size effects do on finite-size samples subjected to phase-transitions. Numerical simulations of the Anderson transition on the standard 3D-Anderson model are necessarily performed on finite-size samples of finite size  $L$ . In the vicinity of the transition, the localization length  $\ell$  [see Eq. (2)] diverges and thus can greatly exceed  $L$ . In this regime,  $L$  acts as an upper bound for the effectively observed localization length  $\ell_L$ . This smooths the transition, no divergence of the localization length can be *directly* observed on a finite-size sample. In order to overcome this limitation, a powerful real-space renormalization method, called finite-size scaling [9, 10], was introduced. This method is based on a single parameter scaling hypothesis [8] and allows to extrapolate from the scaling behavior of  $\ell_L$  versus  $L$  the asymptotic value of the localization length  $\ell$  corresponding to  $L \rightarrow \infty$ . We can generalize static scaling laws to cover our time-dependent problem (see [68] for a similar approach in percolation theory). The single parameter scaling theory [8], successfully used for the standard 3D Anderson model [9, 10], can be applied to analyze our experimental and numerical data, and especially to determine the critical properties of the Anderson transition that we observe, i.e. the critical exponents.

### A. Scaling law at finite time

Knowing the asymptotic behavior when  $t \rightarrow \infty$  is not enough, an additional time-dependent property is needed, too, which we shall investigate now. For  $K$  far above  $K_c$  one observes normal diffusion,  $\langle p^2 \rangle \propto t$ , whereas for  $K$  far below  $K_c$ , the quantum dynamics freezes, at sufficiently long times. Following the standard analysis of the Anderson transition, we make the hypothesis that the transition that we observe for the quasi-periodically kicked rotor follows a one-parameter scaling law [69] (the validity of this scaling hypothesis will of course be checked at the end of the analysis). At the critical point, a third kind of dynamics, namely anomalous diffusion, with  $\langle p^2 \rangle \sim t^k$   $k \neq 1$ , is expected. Let us consider in greater detail the behavior very close to  $K_c$  where these three different laws merge.

In the localized regime, for sufficiently long times, the behavior depends only on the localization length which diverges as  $K$  goes to  $K_c$ :

$$\langle p^2 \rangle \sim \ell^2 \sim (K_c - K)^{-2\nu} \quad (\text{for } K < K_c), \quad (36)$$

with  $\nu$  the localization length critical exponent.

For  $K > K_c$ , the mean kinetic energy increases linearly with time, and the proportionality constant is the diffusion coefficient  $D(K)$ . For  $K < K_c$ ,  $\langle p^2 \rangle$  is bounded by Eq. (36) and there is no diffusion. Thus  $D(K)$  vanishes below  $K_c$ . A different critical exponent  $s$  is used to describe how  $D(K)$  goes to zero above threshold:

$$D(K) \sim (K - K_c)^s \quad (\text{for } K > K_c). \quad (37)$$

We shall now find a single expression presenting these two limit behaviors and also displaying anomalous diffusion at the critical point. We note that, according to the theory of phase-transitions in finite-size samples, a scaling can be applied to  $\langle p^2 \rangle$  depending on the two variables  $1/t$  and  $(K - K_c)$ , both going to zero. We thus use the general scaling law:

$$\langle p^2 \rangle = t^{k_1} F[(K - K_c) t^{k_2}], \quad (38)$$

with  $F(x)$  an unknown scaling function. The exponents  $k_1$  and  $k_2$  can be determined as follows.

In the diffusive regime, for long enough times, we must recover the diffusion law with  $D \sim (K - K_c)^s$  [Eq.(37)]; hence, for  $x \gg 1$ , the scaling function  $F(x)$  should scale as  $x^s$ :

$$\langle p^2 \rangle \sim t^{k_1+s k_2} (K - K_c)^s. \quad (39)$$

As in the diffusive regime,  $\langle p^2 \rangle \sim t$ , we must have  $k_1 + s k_2 = 1$ .

In the localized regime, on the other hand, one must recover  $\langle p^2 \rangle \sim (K_c - K)^{-2\nu}$  [Eq. (36)] for sufficiently long times. Thus, for  $x \rightarrow -\infty$ ,  $F(x) \rightarrow (-x)^{-2\nu}$ , giving:

$$\langle p^2 \rangle = t^{k_1-2\nu k_2} (K_c - K)^{-2\nu} \quad (40)$$

which is compatible with Eq. (36) only if  $k_1 = 2\nu k_2$ . These two relations determine  $k_1$  and  $k_2$  in terms of the physically more meaningful critical exponents  $s$  and  $\nu$ .

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2\nu}{s + 2\nu} \\ k_2 &= \frac{1}{s + 2\nu}. \end{aligned}$$

In the standard Anderson model, the critical exponents are related by Wegner's scaling law [6]:

$$s = (d - 2)\nu, \quad (41)$$

with  $d$  being the dimensionality of the system. For our system, one obtains:

$$k_1 = 2/3; \quad k_2 = 1/3\nu. \quad (42)$$

We therefore expect at the critical point anomalous diffusion with  $\langle p^2 \rangle = t^{k_1} F(0) \sim t^{2/3}$ . We present in the next sub-section a numerical and experimental validation of this prediction.

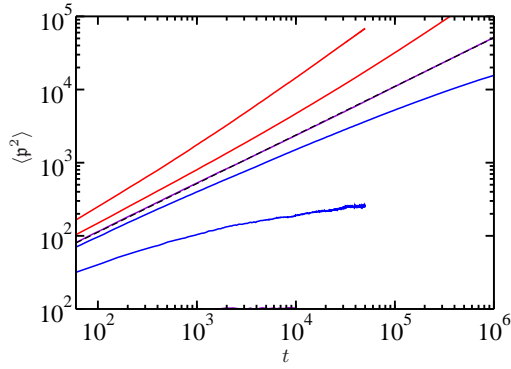


Figure 7: (Color online) Numerically simulated time-evolution of  $\langle p^2 \rangle$  for the quasiperiodic kicked rotor. At the critical point  $K = K_c \approx 6.4$  (purple middle curve), anomalous diffusion  $\langle p^2 \rangle \sim t^{2/3}$  is clearly observed, as expected from theoretical arguments (cf. text). The log-log plot of the critical curve is very well fitted by a straight line of slope 0.664 (black dashed line). In the vicinity of the transition, the dynamics departs from the anomalous diffusion to tend gradually either to a diffusive dynamics (red upper curves corresponding to  $K \Rightarrow K_c$  bending upwards for large  $t$ ) or to a localized dynamics (blue lower curves corresponding to  $K < K_c$  bending downwards for large  $t$ ). Other parameters are  $k = 2.85$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  and  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ .

### B. Critical anomalous diffusion

We verified numerically that the critical behavior, corresponding to the anomalous diffusion in  $t^{2/3}$  is observed up to a very large number of kicks ( $t = 10^6$ ). The (purple) middle curve of Fig. 7 displays the time-evolution of  $\langle p^2 \rangle$  from numerical simulations for the stochasticity parameter  $K = 6.4$ . Anomalous diffusion  $\langle p^2 \rangle \sim t^{2/3}$  is clearly seen from the log-log plot over 4 orders of magnitude, which is very well fitted by a straight line of slope 0.664. Other curves, for different  $K$ , tend at long times to bend either horizontally (below  $K_c$ ) or towards slope unity (above  $K_c$ ). This is a clear proof that we face here a true phase transition and not a smooth cross-over. Note also that the fact that the numerically measured critical slope is very close to the theoretical prediction  $2/3$  implies that the Wegner's scaling law  $s = \nu$  is valid at an accuracy better than 1%.

Fig. 8 displays the experimental evolution of  $\Pi_0^{-2}(t) \sim \langle p^2 \rangle$  versus time. The critical curve (middle curve corresponding to  $K \approx 6.4$ ) in purple is well fitted by the relation  $\Pi_0^{-2}(t) = A + Bt^{2/3}$ , see Fig. 8a. Fig. 8b displays in log-log scale the experimental data  $\Pi_0^{-2}(t)$  vs  $t$ . The algebraic dependence (with exponent  $2/3$ ) of the critical dynamics is again clearly visible. In all plots in Figs. 8 the red upper curves evidence the above-criticality diffusive behavior and the blue lower curves the below-criticality localized behavior.

From renormalization theory, we know that the crit-

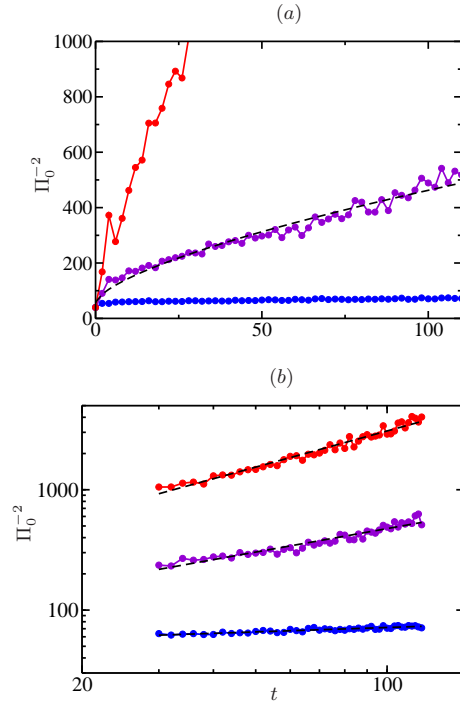


Figure 8: (Color online) Experimentally observed time-evolution of  $\Pi_0^{-2} \sim \langle p^2 \rangle$  for the quasiperiodic kicked rotor. Close to the critical point  $K = K_c \approx 6.4$  (purple middle curve), anomalous diffusion  $\Pi_0^{-2}(t) \sim t^{2/3}$  is clearly observed. (a) The critical anomalous curve is well fitted by  $\Pi_0^{-2}(t) = A + Bt^{2/3}$  (black dashed line). The red upper curve evidence the far-above-criticality diffusive behavior ( $K = 9.0$ ) and the blue lower curve the far-below-criticality ( $K = 4.0$ ) localized behavior. (b) These experimental results show a clear algebraic behavior, with exponent  $\approx 0$  (blue lower curve, localized regime),  $2/3$  (purple middle curve, critical regime) and  $1$  (red upper curve, diffusive regime), slightly perturbed by decoherence processes responsible for the residual increase in the localized regime. Other parameters are the same as in Fig. 7.

ical behavior shows the existence of a fixed hyperbolic point [16]. It is a fixed point because the critical behavior remains the same at all times (opposite to the localized case for example, for which a characteristic time can be defined, the localization time), and it is a hyperbolic point since the localized dynamics close to criticality will follow only for a finite time the anomalous diffusion with exponent  $2/3$  and will progressively tend to a localized behavior for large enough time. The rate at which the behavior changes is related to the critical exponent of the phase transition  $\nu$ .

An efficient way to observe the departing of the dynamics from the critical anomalous diffusion is to consider the

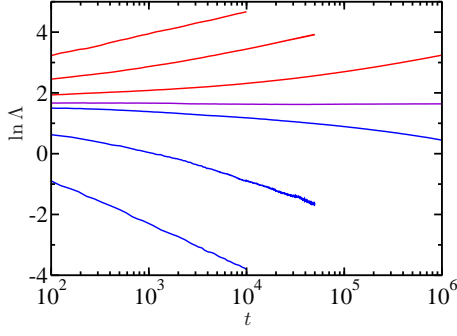


Figure 9: (Color online) Numerical simulation showing the evolution of the dynamics from the critical behavior towards either a diffusive dynamics or a localized state. Plotting the quantity  $\ln \Lambda = \ln \langle p^2 \rangle t^{-2/3}$  vs.  $\ln t$  allows to easily distinguish the critical behavior from diffusive or localized behavior: The critical curve (corresponding to  $K = K_C \approx 6.4$ ) has a zero slope; whereas the far localized ( $K = 4.0$ ) one has a slope  $-2/3$  and the far diffusive ( $K = 9.0$ ) one a slope  $1/3$ . Other parameters are the same as in Fig. 7.

quantity

$$\Lambda = \frac{\langle p^2 \rangle}{t^{2/3}}, \quad (43)$$

or, equivalently, in the case of the experimental data:

$$\Lambda_0 = \frac{1}{\Pi_0^2(t) t^{2/3}}, \quad (44)$$

as a function of time. This is illustrated in Fig. 9, which displays  $\ln \Lambda$  vs.  $t$ . The critical behavior can be easily pin-pointed: The corresponding (purple) curve has a zero slope, as the quantity  $\Lambda$  is (asymptotically) constant at criticality. In the diffusive regime, the quantity  $\Lambda$  increases with time (red curves), whereas it decreases in the localized regime (blue curves). In the far localized regime, we observe an algebraic dependence  $\Lambda(t) \sim t^{-2/3}$  as  $\langle p^2 \rangle(t) = 2\ell^2$  for  $t > \tau_{\text{loc}}$ . In the far diffusive regime, the algebraic dependence is  $\Lambda(t) \sim t^{1/3}$  as  $\langle p^2 \rangle(t) \sim t$ .

The above numerical and experimental observations validate the theoretical prediction for the critical behavior:  $\langle p^2 \rangle \sim t^{2/3}$ . Such critical behavior for the quasi-periodic kicked rotor was predicted using another scaling approach and numerically verified in [50]. It was also numerically observed for a spatially-3D kicked rotor [41] and in the standard 3D Anderson model [69], and put on firm theoretical grounds in [70].

### C. Finite-time scaling

We shall now explain the procedure used to verify the scaling of our numerical and experimental data according to the law deduced above:

$$\langle p^2 \rangle = t^{2/3} F \left[ (K - K_c) t^{1/3\nu} \right]. \quad (45)$$

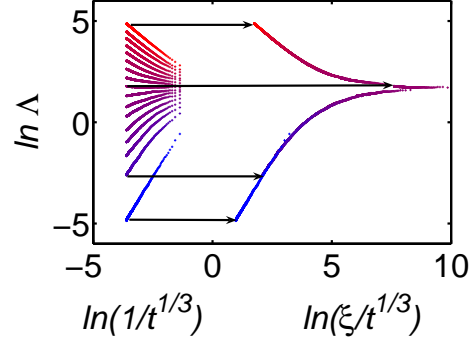


Figure 10: (Color online) Raw numerical data, displayed in the form  $\ln \Lambda = \ln \langle p^2 \rangle t^{-2/3}$  vs.  $\ln t^{-1/3}$  (on the left). Each curve corresponds to a different stochasticity parameter  $K$ . The finite-time scaling procedure consists in shifting horizontally each curve by a quantity  $\ln \xi(K)$  so that the curves overlap. This allows one to determine both the scaling function  $f$  (on the right) and the scaling parameter  $\xi(K)$ .

Our method is similar to the finite-size scaling procedure used by MacKinnon and Kramer [9, 71], and Pichard and Sarma [10] to numerically study the Anderson transition on finite-samples of the 3D Anderson model, but we apply it here to the temporal behavior of the data, thus the name “finite-time scaling”.

We assume the quantity  $\Lambda(K, t) = \langle p^2 \rangle t^{-2/3}$  to be an arbitrary function

$$\Lambda(K, t) = f \left( \xi(K) t^{-1/3} \right), \quad (46)$$

where the scaling parameter  $\xi(K)$  depends *only* on  $K$ , which is the parameter appearing in the one-parameter scaling hypothesis. This scaling assumption is less restrictive than Eq. (45) since no assumption on the dependence of  $\xi$  on  $K$  is made. We must thus show that the resulting scaling parameter  $\xi(K)$  is compatible with Eq. (45).

In the left part of Fig. 10 we display plots of  $\ln \Lambda(K, t)$  vs.  $\ln t^{-1/3}$  for different values of  $K$ . For most values of  $\ln \Lambda$ , several values of  $\ln t^{-1/3}$  correspond to the same  $K$  value. The only way to conform with the condition (46) is to shift each curve horizontally by a different quantity  $\ln \xi(K)$  such that curves corresponding to different values of  $K$  overlap. This can be achieved by minimizing the variance of the values  $\ln \xi(K) t^{-1/3}$  corresponding to each value of  $\ln \Lambda$ . The function  $\xi(K)$  can be determined by applying a least square fit to the data.

This minimization procedure does not allow one to compute the absolute scale of  $\xi(K)$ , as the shifting procedure (see Fig. 10) is invariant under a global shift of the origin. We can thus set the scaling parameter  $\xi(K)$  to be equal to the localization length in the strongly localized regime where the duration of the experiment is much

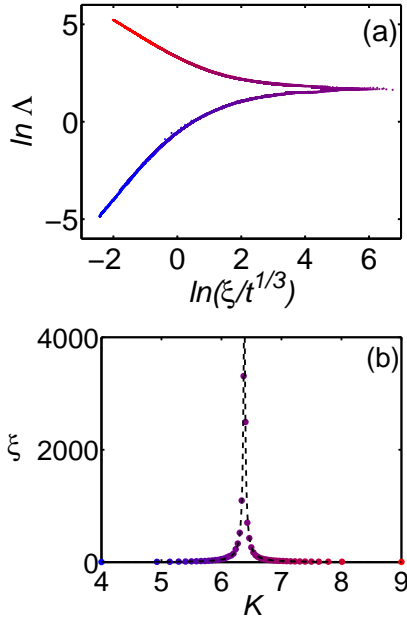


Figure 11: (Color online) Finite-time scaling applied to the results of numerical simulations of the quasiperiodic kicked rotor. The time-evolution of  $\langle p^2 \rangle$  is computed as a function of time, from 30 to  $10^4$  kicks, for several values of  $K$  between  $K = 4$  and  $K = 9$ . The finite-time scaling procedure allows us to determine both the scaling function  $f$  (a), clearly displaying an upper branch (red) associated with the diffusive regime, and a lower branch (blue) associated with the localized regime. The dependence of the scaling parameter  $\xi$  on  $K$  (b) displays a divergent behavior around the critical point  $K_c = 6.4$ , which is the signature of the Anderson phase transition. The dashed line is a fit using Eq. (48). The resulting critical exponent is  $\nu = 1.6 \pm 0.1$ . Other parameters are  $\bar{k} = 2.85$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  and  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ .

larger than the localization time, and  $\langle p^2 \rangle$  converges to its asymptotic value  $2\ell^2$ . Thus

$$\Lambda(K, t) = f\left(\xi(K)t^{-1/3}\right) = 2\ell^2 t^{-2/3},$$

which implies, if we identify the scaling parameter with the localization length,  $\xi(K) \sim \ell$ ,

$$f(x) = 2x^2.$$

Figures 11(a) and 12(a) show the results of the fitting procedure applied to the numerical data and to the experimental data, respectively. In both cases, the procedure groups all points in a *single* curve, within the accuracy of the data. The resulting curve clearly displays two branches, a diffusive (red) and a localized (blue) one, with the critical point being at the tip joining the

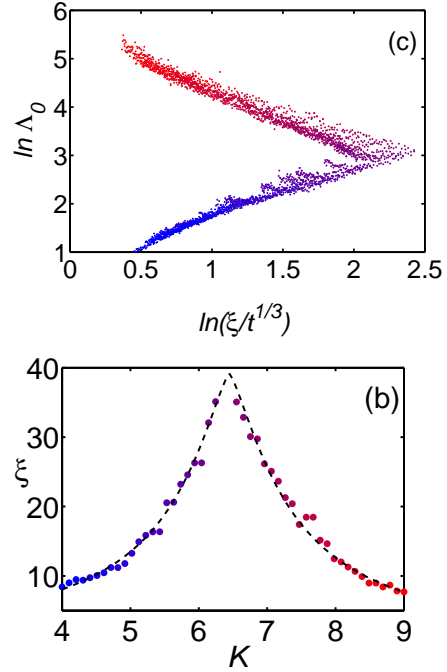


Figure 12: (Color online) Finite-time scaling applied to the experimental results (from 30 to 150 kicks). The scaling procedure is the same as in Fig. 11. (a) The fact that all experimental points lie on a single curve, with a diffusive (red) and a localized (blue) branch, is a proof of the relevance of the one-parameter scaling hypothesis. (b) The maximum displayed by the scaling parameter  $\xi$  in the vicinity of  $K_c = 6.4$  is a clear-cut proof of the Anderson transition. Phase-breaking mechanisms (cf. text) smooth the divergence at the critical point. When these effects are properly taken into account, one obtains a critical exponent  $\nu = 1.4 \pm 0.3$ , [the dashed line is a fit with Eq. (48)] compatible with the numerical results. This plot corresponds to 48 experimental runs. Other parameters as in Fig. 11.

two branches; this is a signature of the Anderson transition. It also justifies *a posteriori* the scaling hypothesis Eq. (46) used for analyzing the data.

The scaling parameter  $\xi(K)$  is plotted in Figs. 11(b) and 12(b), for numerical and experimental data respectively. As stated above, this parameter can be identified to the localization length in the localized regime. In the diffusive regime, it scales as the inverse of the diffusive constant. Indeed, in the far diffusive regime one has  $\langle p^2 \rangle = D(K)t$ , which implies

$$\begin{aligned} \Lambda(K, t) &= D(K)t^{1/3} \\ f(x) &= x^{-1}. \end{aligned}$$

so that  $\xi(K) = 1/D(K)$  in the far diffusive regime.

One notes that  $\xi(K)$  increases rapidly in the vicinity of



the critical value  $K_c$ , on both sides of the transition. This corresponds to a divergence of the localization length and to a vanishing of the diffusion constant at criticality (in practice smoothed by decoherence, see below). This constitutes a clear *experimental* evidence of the Anderson phase transition.

#### D. Experimental determination of the critical exponent

The behavior of  $\xi(K)$  gives a fundamental information about the transition, namely the value of the localization length critical exponent  $\nu$ . There is a discrepancy in the literature between the theoretical predictions  $\nu = 1$  [13],  $\nu = 1.5$  [72], and the result of numerical simulations  $\nu = 1.57 \pm 0.02$  [12], which stresses even more the importance of an experimental determination. In this section, we present the first unambiguous experimental determination of the critical exponent of the Anderson transition in 3 dimensions.

The finite-time scaling procedure allows us to extract from finite-time experimental data the localization length  $\ell$  (corresponding to  $t \rightarrow \infty$ ), which is the order parameter of the Anderson transition. It is given by the scaling parameter  $\xi(K)$  and predicted to diverge at criticality with the power law

$$\ell \sim |K - K_c|^{-\nu}. \quad (47)$$

We thus expect that the singularity in  $\xi(K)$  can be described by Eq. (47), and to be able to extract the value of the critical exponent  $\nu$ . This is of primary importance, as there is presently no unambiguous accurate experimental determination of  $\nu$  for non-interacting particles, and there is a discrepancy in the literature between the theoretical predictions  $\nu = 1$  [13],  $\nu = 1.5$  [72], and the result of numerical simulations  $\nu = 1.57 \pm 0.02$  [12].

When the slope of  $\ln \Lambda$  vs  $\ln t^{-1/3}$  is small, as it is near the critical point, the scaling procedure tends to round off the singularity in  $\xi(K)$ . Moreover, decoherence in the experiment produces a cut-off the algebraic divergence. If the system has a finite phase-coherence time  $\tau_\varphi$ , a new characteristic length [73]  $p_\varphi = [D\tau_\varphi]^{1/2}$  appears in the problem, which sets an upper bound for the observable localization length  $\ell$  and thus smooths its divergence at criticality. In practice, we model such smoothing by introducing a small cut-off on the divergence of  $\xi(K)$ , which takes into account both the finite-time scaling procedure itself and decoherence effects:

$$\frac{1}{\xi(K)} = \alpha |K - K_c|^\nu + \beta. \quad (48)$$

The experimental data have been fitted with this formula (48) [dashed curve in Fig. 12(b)], which gives  $K_c \simeq 6.4 \pm 0.2$ , and a critical exponent  $\nu = 1.4 \pm 0.3$ . In order to compare these results to the ideal case of the perfectly coherent quasiperiodic kicked rotor, Eq. (20), we also fitted the curve in Fig. 11b with Eq. (48); in this case, the

cutoff  $\beta$  accounts for limitations of the finite-time scaling procedure. The model Eq. (48) fits very well to the numerical data [dashed curve in Fig. 11b] and gives the critical stochasticity  $K_c \simeq 6.4 \pm 0.1$  and the critical exponent  $\nu = 1.6 \pm 0.2$ . The good agreement between the numerical simulations and the experimental results proves that spurious effects (such as decoherence) are well under control. Moreover, the experimental value we obtained  $\nu = 1.4 \pm 0.3$  is compatible with the value found in numerical simulations of the true random 3D Anderson model [11, 12]. We emphasize that there are no adjustable parameters in our procedure, all parameters are determined using the atoms themselves as probes.

## VI. UNIVERSALITY OF THE ANDERSON TRANSITION

At this point, a reasonable question is: Does the quasiperiodic kicked rotor exhibits the same critical phenomena – i.e. belongs to the same (orthogonal) universality class [66] – as the true 3D-Anderson model. Can this simple three-frequency dynamical system exactly mimic the critical behavior of 3D disordered electronic conductors? In this section, we show that the answer is positive: *The 3-frequency quasiperiodic kicked rotor and the true 3D-Anderson model belong to the same universality class.* This is a strong claim that relies on a very precise determination of the critical exponent  $\nu$ . The accuracy of this determination is comparable to that obtained in the most sophisticated numerical studies of the 3D Anderson model [12, 74]. Within numerical uncertainties, the critical exponent is found to be universal and identical to the one found for the 3D-Anderson model [12]. The technical details of the calculation have already been reported in [75]. We here just discuss the essential ingredients proving universality.

### A. Precise estimate of the critical exponent

Reliably distinguishing the different universality classes of the Anderson transition requires a very precise determination of the critical exponent; for instance, the value  $\nu = 1.43 \pm 0.04$  for the unitary symmetry class is close to the one for the orthogonal symmetry class [76]  $\nu = 1.57 \pm 0.02$ .

The main uncertainty in our experimental determination of the critical exponent is due to statistical errors on  $\Pi_0$  and to the limited duration of the experiment. However, numerical simulations are not limited to 150 kicks but can be ran for several thousands of kicks, and statistical uncertainties on  $\langle p^2 \rangle$  can be sharply reduced by averaging over initial conditions. The numerical inaccuracy in the finite-time scaling determination of  $\nu$  from the numerical data is thus mainly due to the procedure failing to reproduce the singular behavior of the scaling function at the critical point.

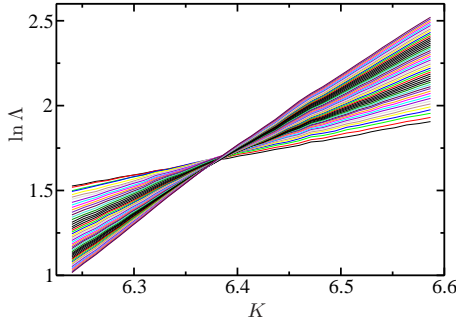


Figure 13: (Color online) Dynamics of the quasiperiodic kicked rotor in the vicinity of the critical regime. The rescaled quantity  $\ln \Lambda(K, t)$  vs.  $K$  is plotted from  $t = 30$  to  $t = 40000$ . All curves intersect, to a very good approximation, at a single point ( $K_c \simeq 6.4$ ,  $\ln \Lambda_c \simeq 1.6$ ). This multiple crossing indicates the occurrence of the metal-insulator transition. Small deviations from crossing are due to the existence of an irrelevant scaling parameter at finite time and residual correlations in the disordered potential (see text).  $K$  and  $\epsilon$  are swept along the straight line drawn in Fig. 6. Parameters are  $\hbar = 2.85$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$ ,  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ .

How can one improve the accuracy on the determination of the critical exponent  $\nu$ ? This can be achieved by fitting directly the raw data  $\ln \Lambda(K, t)$ . The starting point of our analysis is the behavior of the scaling function  $\mathcal{F} \equiv \ln F$  in the vicinity of the critical point:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda &= \ln F \left[ (K - K_c) t^{1/3\nu} \right] \\ &= \mathcal{F} \left[ (K - K_c) t^{1/3\nu} \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

As  $\ln \Lambda(K, t)$  is an analytical function for *finite*  $t$  (Fig. 11), the scaling function  $\mathcal{F}$  can be expanded around  $K_c$ :

$$\ln \Lambda(t) \simeq \ln \Lambda_c + (K - K_c) t^{1/3\nu} \mathcal{F}_1 + \dots, \quad (50)$$

where  $\ln \Lambda_c \equiv \mathcal{F}[0]$  and  $\mathcal{F}_1 = d\mathcal{F}(x)/dx|_{x=0}$ .

A remarkable feature of Eq. (50) is that when  $\ln \Lambda$  is plotted against  $K$ , the curves for different times  $t$  should intersect at a common point  $(K_c, \ln \Lambda_c)$ ; and this crossing, indicates the occurrence of the metal-insulator transition. This is clearly visible in Fig. 13. Another interesting feature of Eq. (50) is that the critical exponent  $\nu$  can be determined from the slope of  $\ln \Lambda$  at  $K_c$ :

$$(\ln \Lambda)'(K_c, t) \equiv \left. \frac{\partial \ln \Lambda(K, t)}{\partial K} \right|_{K=K_c} \propto t^{1/3\nu}. \quad (51)$$

This is the simplest procedure to evaluate the critical exponent:  $(\ln \Lambda)'(K_c, t)$  is evaluated by linear regression of  $\ln \Lambda$  vs  $K$  in a small interval near  $K_c$ , giving an exponent  $\nu \simeq 1.61 \pm 0.10$  (see Fig. reffig:simulambdaprimevslnt). The linear regime has nevertheless very small size:  $(K - K_c)t^{1/3\nu} \ll 1$ , and neglecting non-linear corrections lead

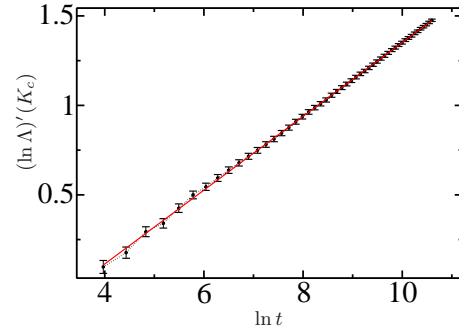


Figure 14: (Color online) Linear regression of  $(\ln \Lambda)'(K_c, t)$ , Eq. (51) vs.  $\ln t$  for  $t = 30$  to  $t = 40000$  permits to extract the critical exponent  $\nu$  from the slope  $1/3\nu$ , which is  $\nu = 1.61$ . It is difficult to assess the uncertainty associated with this measurement as it depends crucially on the interval of  $K$  where the behavior of  $\ln \Lambda$  vs  $K$  can be assumed to be “linear”. The parameters are the same as in Fig. 13.

to systematic errors on the estimation of  $\nu$ . This is why the error  $\pm 0.1$  refers to systematic errors and not to the uncertainty on the fitting parameters, which is much smaller as easily seen in Fig. 14.

In practice, there are small systematic deviations from Eq. (50). Such deviations can have different sources:

- the presence of an irrelevant scaling variable, that is when, in addition to  $(K - K_c)t^{1/3\nu}$ ,  $(\ln \Lambda)$  depends also on another scaling variable which vanishes in the limit  $t \rightarrow \infty$ , but still plays a role at short time;
- non-linear dependence of the scaling variables in the stochasticity parameter  $K$ ;
- resonances due to the periods being well approximated by a ratio of small integers.

The latter one is specific to our three-frequency dynamical system, but the former two also play an important role in the standard Anderson model [11, 12]. These small corrections can be taken into account – following the method devised in [12] for the Anderson model – by slightly modifying the basic scaling law, Eq. (45), in two ways: introduce a non-linear of the argument of the  $\mathcal{F}$  function with  $K - K_c$  in Eq. (49) on the one hand, and allow to subtract irrelevant scaling corrections to  $(\ln \Lambda)$  on the other hand. To minimize the effect of resonances, we only retain data for sufficiently long times and average over different initial conditions, i.e. different quasi-momenta  $\beta$  and phases  $\varphi_2$  and  $\varphi_3$ .

We computed  $\ln \Lambda$  for times up to  $t = 10^6$  kicks with an accuracy of 0.15%, for which more than 1000 initial conditions are required. We analyze data over the full range of times  $t \in [10^3, 10^6]$ : The best fit is determined



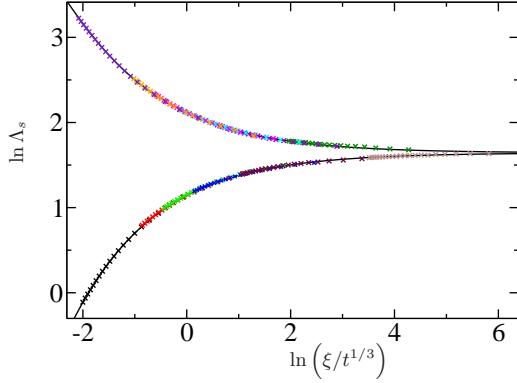


Figure 15: (Color online)  $\ln \Lambda_s$ , after subtraction of corrections due to the irrelevant scaling variable, plotted versus  $\ln(\xi/t^{1/3})$  and the scaling function deduced from the model (black curve). The parameters are that of the set  $\mathcal{D}$  (see Table I). The best fit estimates of the critical stochasticity and the critical exponent are in this case:  $K_c = 8.09 \pm 0.01$ ,  $\ln \Lambda_c = 1.64 \pm 0.03$  and  $\nu = 1.59 \pm 0.01$ .

	$\tilde{k}$	$\omega_2$	$\omega_3$	$K$	$\epsilon$
$\mathcal{A}$	2.85	$2\pi\sqrt{5}$	$2\pi\sqrt{13}$	$6.24 \rightarrow 6.58$	$0.413 \rightarrow 0.462$
$\mathcal{B}$	2.85	$2\pi\sqrt{7}$	$2\pi\sqrt{17}$	$5.49 \rightarrow 5.57$	$0.499 \rightarrow 0.514$
$\mathcal{C}$	2.2516	$1/\eta$	$1/\eta^2$	$4.98 \rightarrow 5.05$	$0.423 \rightarrow 0.436$
$\mathcal{D}$	3.5399	$\tilde{k}/\eta$	$\tilde{k}/\eta^2$	$7.9 \rightarrow 8.3$	$0.425 \rightarrow 0.485$

Table I: The four sets of parameters considered:  $\tilde{k}$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$  control the microscopic details of the disorder, while  $\epsilon$  drives the anisotropy of the hopping amplitudes.

by minimizing the deviation

$$\chi^2 = \sum_{K,t} \left[ \frac{\ln \Lambda(K,t) - \mathcal{F}(K,t)}{\sigma(K,t)} \right]^2, \quad (52)$$

where  $\sigma(K,t)$  is the numerical uncertainty (one standard deviation) of the computed quantities  $\ln \Lambda(K,t)$ .

In Fig. 15, we plot the scaling function corrected from the irrelevant scaling variable, as a function of  $\xi(K)/t^{1/3}$ . All data collapse almost perfectly on the scaling function deduced from the model.

Since the measurement errors in the data introduce some uncertainty in the determination of the fitted parameters, the confidence intervals for the fitted parameters were estimated using the bootstrap method which yields Monte-Carlo estimates of the errors in the fitted parameters [77]. The fitted parameters presented below are given with the corresponding 68.2% confidence intervals (standard errors).

	$K_c$	$\ln \Lambda_c$	$\nu$	$y$
$\mathcal{A}$	$6.36 \pm 0.02$	$1.60 \pm 0.04$	<b><math>1.58 \pm 0.01</math></b>	$0.71 \pm 0.28$
$\mathcal{B}$	$5.53 \pm 0.03$	$1.08 \pm 0.09$	<b><math>1.60 \pm 0.03</math></b>	$0.33 \pm 0.30$
$\mathcal{C}$	$5.00 \pm 0.03$	$1.19 \pm 0.15$	<b><math>1.60 \pm 0.02</math></b>	$0.23 \pm 0.29$
$\mathcal{D}$	$8.09 \pm 0.01$	$1.64 \pm 0.03$	<b><math>1.59 \pm 0.01</math></b>	$0.43 \pm 0.23$

Table II: Best fit estimates of the critical parameters  $K_c$  and  $\ln \Lambda_c$ , the critical exponent  $\nu$  together with their uncertainty (one standard deviation).  $\nu$  is expected to be universal whereas  $\ln \Lambda_c$  and  $K_c$  do depend on anisotropy [52] and  $\tilde{k}$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . Irrelevant parameters are sensitive to microscopic details, therefore  $y$  is strictly positive and not universal.

### B. Universality of the critical exponent

A key property of the Anderson transition is that the critical behavior can be described [76, 78] in a framework of universality classes. This means that the critical behavior should not be sensitive of the microscopic details but should depend only on the underlying symmetries of the system (e.g. time-reversal symmetry). Irrelevant parameters become negligible for sufficiently long times/large system size, whereas the relevant parameter behavior is universal. This brings the universality of the critical exponents. When considering a system with pseudo-random disorder such as the quasi-periodic kicked rotor, one could ask whether the universality is broken or not due to correlations in the disorder potential. To answer the question, we changed some parameters that govern the microscopic details of the disorder potential of the quasi-periodic kicked rotor, namely  $\tilde{k}$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$  and the path along which we cross the transition.

The computer time required in those sophisticated numerical studies is very long. Therefore we chose to restrict ourselves to the *detailed* study of only four different cases, see Table I.

The estimated critical parameters and their confidence intervals are given in Table II. A *typical* scaling function is drawn in Fig. 15.

The most important point to be drawn from Table II is that the estimates of the exponent  $\nu$  for the four different sets are in almost perfect agreement with each other and with the estimate of  $\nu$  based on numerical studies of the true random Anderson model  $\nu = 1.57 \pm 0.02$  of the orthogonal symmetry class [12]. Note also that in the case of the quasiperiodic kicked rotor, the critical stochasticity  $K_c$  and  $\ln \Lambda_c$  depend on: (i) the anisotropy governed by the parameter  $\epsilon$  and (ii)  $\tilde{k}$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . The dependence (i) of the critical disorder and critical  $\ln \Lambda$  on anisotropy is a typical feature of the Anderson transition in anisotropic solids [51–53]. The quasiperiodic kicked rotor may indeed be seen to correspond to a model of random chains (coupled by terms scaling like  $\epsilon$  in the two transverse directions) considered in [52], see Eq. (33). The dependence (ii) follows from the relation between the initial “classical” diffusion constant (see section II) and the parameters  $\tilde{k}$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . Such a dependence was observed both numerically and experimentally for the standard kicked

rotor [79, 80], and was accounted for in terms of correlations between the kicks by Shepelyansky in his early work [79].

The Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor is a robust feature: we observed that, for certain mutually incommensurate triplets  $(\vec{k}, \omega_2, \omega_3)$ , systematic deviations to scaling (such as resonances) can occur for intermediate times, but eventually vanish.

## VII. CONCLUSION

We discussed in detail in the present work the first unambiguous evidence of the Anderson transition in 3D with atomic matter waves with atomic matter waves by realizing experimentally a quasiperiodic kicked rotor. This allowed us to put into evidence the existence of the transition and to measure its critical exponent thanks to a finite-time scaling procedure. Our numerical result  $\nu = 1.59 \pm 0.01$  is in perfect agreement with the current value for the Anderson model, and is compatible with our experimental determination  $1.4 \pm 0.3$ . We have also shown that the quasiperiodic kicked rotor exhibits the same critical phenomena as the truly random Anderson model, and therefore that both systems belong to the same (orthogonal) universality class.

These results are particularly relevant since they show that it is possible to explore a system like the Anderson model, that played an important role in many areas of physics but resisted thorough experimental investigations. One can guess that this kind of analogy will be extended to other models in the near future, as evidenced by the work of Wang and Gong [81] concerning the analogy of a quantum kicked rotor and the Harper model. This shall open new and exciting tracks in cold-atom physics. These analog models can even prove more flexible and more powerful than the original ones, as, for example, our Anderson-equivalent system can very easily be extended to higher dimensions by introducing new incommensurate frequencies. Intermediate situations like a 2D kicked rotor with two or three incommensurate frequencies might be a convenient solution from the experimental point of view. This can hardly be done in condensed-matter systems or even in the ultracold atom realization of the 1D Anderson model [22]. The theoretical study of quantum phase transitions in high dimensions will most probably be boosted as experimental results become available. We are presently working in this direction: Numerical and experimental determinations of the critical exponents in four dimensions seems feasible.

- 
- [1] F. Bloch, Z. Phys. **52**, 555 (1928).
  - [2] C. Zener, Proc. R. Soc. (London) A **145**, 523 (1934).
  - [3] P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
  - [4] T. D., Phys. Rep. **13**, 93 (1974).
  - [5] J. T. Edwards and D. J. Thouless, J. Phys. C **5**, 807 (1972).
  - [6] F. Wegner, Z. Phys. **B25**, 327 (1976).
  - [7] R. Landauer, Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
  - [8] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
  - [9] A. MacKinnon and B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981).
  - [10] J. L. Pichard and G. Sarma, J. Phys. C **14**, L127 (1981).
  - [11] A. MacKinnon, J. Phys. C **6**, 2511 (1994).
  - [12] K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **82**, 382 (1999).
  - [13] D. Vollhardt and P. Wölfe, Phys. Rev. Lett. **48**, 699 (1982).
  - [14] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985).
  - [15] D. M. Basko, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler, Ann. Phys. **321**, 1126 (2006).
  - [16] B. Kramer and A. MacKinnon, Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993).
  - [17] M. Störzer, P. Gross, C. M. Aegerter, and G. Maret, Phys. Rev. Lett. **96**, 063904 (2006).
  - [18] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and B. Segev, Nature (London) **446**, 52 (2007).
  - [19] C. A. Condat and T. R. Kirkpatrick, Phys. Rev. B **36**, 6782 (1987).
  - [20] I. S. Graham, L. Piché, and M. Grant, Phys. Rev. Lett. **64**, 3135 (1990).
  - [21] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov, and B. A. van Tiggelen, Nature Phys. **4**, 945 (2008).
  - [22] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, Nature (London) **453**, 891 (2008).
  - [23] B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
  - [24] G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford, and F. M. Izrailev, *Stochastic behavior of a quantum pendulum under periodic perturbation* (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1979), vol. 93, pp. 334–352.
  - [25] D. R. Grempel, R. E. Prange, and S. Fishman, Phys. Rev. A **29**, 1639 (1984).
  - [26] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **62**, 345 (1989).
  - [27] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaram, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **75**, 4598 (1995).
  - [28] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, Phys. Rev. Lett. **101**, 255702 (2008).
  - [29] F. M. Izrailev, Phys. Rep. **196**, 299 (1990).
  - [30] D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **56**, 677 (1986).
  - [31] When the quasi-momentum is taken into account,  $m$  should simply be replaced by  $m + \beta$ , leaving the conclusions unaffected.
  - [32]  $W(\theta)$  is singular for  $K/k > \pi$  and the behavior of  $W_r$  is complicated. However, this non-physical singularity can be avoided by a mapping on a different tight-binding model [30].
  - [33] H. Lignier, J. C. Garreau, P. Szriftgiser, and D. Delande,

- Europhys. Lett. **69**, 327 (2005).
- [34] F. M. Izrailev, Phys. Rep. **196**, 299 (1990).
- [35] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **67**, 2405 (1991).
- [36] K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997).
- [37] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. **77**, 4536 (1996).
- [38] D. Vollhardt and P. Wölfe, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980).
- [39] A. Altland, Phys. Rev. Lett. **71**, 69 (1993).
- [40] E. Doron and S. Fishman, Phys. Rev. Lett. **60**, 867 (1988).
- [41] J. Wang and A. M. García-García, Phys. Rev. E **79**, 036206 (2009).
- [42] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **62**, 345 (1989).
- [43] D. L. Shepelyansky, Physica D **8**, 208 (1983).
- [44] O. I. Lobkis and R. L. Weaver, Phys. Rev. E **71**, 011112 (2005).
- [45] R. Scharf, J. Phys. A **22**, 4223 (1989).
- [46] R. Blümel and U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **69**, 217 (1992).
- [47] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2001), 2nd ed.
- [48] H. J. Stöckmann, *Quantum Chaos an Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999).
- [49] D. M. Basko, M. A. Skvortsov, and V. E. Kravtsov, Phys. Rev. Lett. **90**, 096801 (2003).
- [50] F. Borgonovi and D. L. Shepelyansky, Physica D **109**, 24 (1997).
- [51] Q. Li, C. M. Soukoulis, E. N. Economou, and G. S. Grest, Phys. Rev. B **40**, 2825 (1989).
- [52] N. A. Panagiotides, S. N. Evangelou, and G. Theodorou, Phys. Rev. B **49**, 14122 (1994).
- [53] I. Zambetaki, Q. Li, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis, Phys. Rev. Lett. **76**, 3614 (1996).
- [54] J. Ringot, Y. Lecoq, J. C. Garreau, and P. Szriftgiser, Eur. Phys. J. D **7**, 285 (1999).
- [55] J. Ringot, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, Phys. Rev. A **65**, 013403 (2001).
- [56] P. Szriftgiser, H. Lignier, J. Ringot, J. C. Garreau, and D. Delande, Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul. **8**, 301 (2003).
- [57] J. Chabé, H. Lignier, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, Opt. Commun. **274**, 254 (2007).
- [58] J. Ringot, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande, Phys. Rev. Lett. **85**, 2741 (2000).
- [59] P. Szriftgiser, J. Ringot, D. Delande, and J. C. Garreau, Phys. Rev. Lett. **89**, 224101 (2002).
- [60] H. Lignier, J. Chabé, D. Delande, J. C. Garreau, and P. Szriftgiser, Phys. Rev. Lett. **95**, 234101 (2005).
- [61] J. Chabé, H. Lignier, H. Cavalcante, D. Delande, P. Szriftgiser, and J. C. Garreau, Phys. Rev. Lett. **97**, 264101 (2006).
- [62] W. H. Zurek, Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003).
- [63] M. Janssen, Phys. Rep. **295**, 1 (1998).
- [64] G. Lemarié et al., in preparation.
- [65] M. G. Raizen, F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, and B. Sundaram, J. Eur. Opt. Soc. B **8**, 687 (1996).
- [66] F. Evers and A. D. Mirlin, Rev. Mod. Phys. **80**, 1355 (pages 63) (2008).
- [67] G. Lemarié et al., to be published.
- [68] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, 1994), 2nd ed.
- [69] T. Ohtsuki and T. Kawarabayashi, J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 314 (1997).
- [70] A. D. Mirlin and Y. V. Fyodorov, Phys. Rev. Lett. **72**, 526 (1994).
- [71] A. MacKinnon and B. Kramer, Z. Phys. B **53**, 1 (1983).
- [72] A. M. García-García, Phys. Rev. Lett. **100**, 076404 (pages 4) (2008).
- [73] B. Shapiro and E. Abrahams, Phys. Rev. B **24**, 4889 (1981).
- [74] F. Milde, R. Römer, M. Schreiber, and U. V., Eur. Phys. J. B **15**, 685 (2000).
- [75] G. Lemarié, B. Grémaud, and D. Delande, arXiv:0904.2324 (2009).
- [76] K. Slevin and T. Ohtsuki, Phys. Rev. Lett. **78**, 4083 (1997).
- [77] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran. The art of scientific computing* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992), 2nd ed.
- [78] K. B. Efetov, Advances in Physics **32**, 53 (1983).
- [79] D. L. Shepelyansky, Physica D **28**, 103 (1987).
- [80] D. A. Steck, V. Milner, W. H. Oskay, and M. G. Raizen, Phys. Rev. E **62**, 3461 (2000).
- [81] J. Wang and J. Gong, Phys. Rev. A **77**, 031405 (2008).

# Universalité de la transition d'Anderson avec le Kicked Rotor quasi-périodique

## Sommaire

<b>A</b>	<b>Le Kicked Rotor périodique atomique . . . . .</b>	<b>42</b>
A.1	Dynamique classique . . . . .	43
A.2	Dynamique quantique . . . . .	49
<b>B</b>	<b>Equivalence formelle entre le Kicked Rotor et le modèle d'Anderson . . . . .</b>	<b>52</b>
B.1	Opérateur d'évolution et modèle d'Anderson unitaire . . . . .	52
B.2	Equation aux valeurs propres et modèle de Loyd . . . . .	53
B.3	Localisation des états de Floquet de l'opérateur d'évolution . . . . .	54
<b>C</b>	<b>De la localisation des états de Floquet à la localisation dynamique . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>D</b>	<b>Effets des résonances quantiques . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>E</b>	<b>Classes de symétrie . . . . .</b>	<b>60</b>

**L**E Kicked Rotor quasi-périodique, tel que réalisé expérimentalement ou simulé numériquement, présente une transition de phase isolant-métal gouvernée par le degré de chaos, transition d'Anderson dont nous avons exhibé le comportement critique. De l'analyse approfondie des propriétés d'échelle de la dynamique de ce système a résulté la première détermination expérimentale non-ambigüe de l'exposant critique de la longueur de localisation  $\nu$ . La valeur trouvée,  $\nu = 1.4 \pm 0.3$  est compatible avec la précédente détermination de  $\nu$ ,  $\nu = 1.57 \pm 0.02$ , à partir de simulations numériques directes du modèle d'Anderson 3D.

Néanmoins, à ce stade, l'équivalence entre le Kicked Rotor quasi-périodique et les conducteurs désordonnés 3D a toujours le statut de conjecture. Une réponse rigoureuse à la question de savoir si le Kicked Rotor quasi-périodique présente les *mêmes* phénomènes critiques - i.e. appartient à la même classe d'universalité (orthogonale) - que le modèle d'Anderson 3D n'a pas encore été donnée. Est-ce que ce simple système dynamique à trois

fréquences peut mimer exactement le comportement critique de conducteurs électroniques 3D désordonnés ?

La question est d'importance : si la réponse est affirmative, alors nous avons là un argument fort soutenant l'équivalence entre le Kicked Rotor quasi-périodique et les systèmes désordonnés 3D invariants par renversement du temps. En outre, l'on pourrait alors envisager l'étude de la transition d'Anderson en dimension  $d$  supérieure à trois (quatre, cinq, etc.), avec ce système modulé avec un nombre  $d$  de fréquences incommensurables. Sur le plan numérique, ceci est extrêmement intéressant du fait que la transition d'Anderson est prédite ne pas avoir de dimension critique supérieure  $d_c$ , à la différence de transitions de phases du second-ordre habituelles, où, à partir de  $d_c$ , le comportement critique est exactement donné par la théorie de champ moyen. Or les simulations numériques du modèle d'Anderson de dimensionnalité  $d$  supérieure à trois sont d'une extrême lourdeur et ne permettent pas la détermination suffisamment précise des caractéristiques de la transition. Le Kicked Rotor quasi-périodique à  $d$  fréquences paraît, lui, a priori beaucoup plus simple à simuler [119]. Bien entendu, une étude expérimentale d'un "solide" (pseudo-)désordonné (effectivement) 4D est aussi d'un grand intérêt.

Le comportement critique de la transition d'Anderson est caractérisé, en première instance, par ses exposants critiques. Les valeurs de ceux-ci sont fondamentales du fait qu'elles sont universelles, i.e. elles ne dépendent pas des détails microscopiques du désordre (probabilité de distribution du désordre, anisotropie), mais seulement de la classe de symétrie (voir section C.2.3 du chapitre 2 et [38–40]). Ces exposants caractérisent entièrement le point critique, point fixe hyperbolique du flot de renormalisation (voir section C.2.2 du chapitre 2). Le phénomène d'universalité est relié au fait que des systèmes différents peuvent appartenir au même bassin d'attraction d'un point fixe critique : c'est le cas lorsque des systèmes diffèrent seulement par leurs détails microscopiques, détails d'importance négligeable une fois ces systèmes renormalisés (il y a tout de même quelques exceptions à cette règle, voir [40]). En revanche, des systèmes ayant des symétries (anti-unitaires - voir section E du chapitre 3) différentes appartiennent à des classes d'universalité différentes.

La question est donc de savoir si le Kicked Rotor quasi-périodique et le modèle d'Anderson 3D appartiennent au même bassin d'attraction, i.e. s'ils ont même point fixe critique, soit encore, s'ils ont même exposant critique  $\nu$  ( $s = \nu$  en dimension trois, voir [6] et section V B de notre article [120] reproduit en section E du chapitre 5). La réponse à cette question n'est pas du tout évidente et nous y consacrons ce chapitre.

## A Analyse fine du flot de renormalisation observé avec le Kicked Rotor quasi-périodique

Considérant un système désordonné sans spin, deux classes de symétrie existent : celle "orthogonale" regroupant les systèmes invariants par renversement du temps, ou plus généralement symétriques par une transformation anti-unitaire (voir section E du chapitre 3), et l'autre, "unitaire", des systèmes non symétriques par une telle transformation. Pour distinguer de façon non ambiguë ces deux classes d'universalité de la transition d'Anderson, il faut déterminer de façon très précise l'exposant critique  $\nu$ . De fait, la valeur  $\nu = 1.43 \pm$

0.04 [38] pour la classe de symétrie unitaire est très proche de celle  $\nu = 1.57 \pm 0.02$  pour la classe de symétrie orthogonale [12].

Notre méthode de détermination de l'exposant critique, exposée à la section V D de notre article [120] (voir section E du chapitre 5), et appliquée aux données expérimentales (donnant  $\nu = 1.4 \pm 0.3$ ) et numériques (donnant  $\nu = 1.6 \pm 0.2$ <sup>1</sup>) ne permet donc pas, puisqu'elle donne des résultats avec une incertitude trop grande, de répondre à la question de savoir si le Kicked Rotor quasi-périodique appartient à la même classe d'universalité que le modèle d'Anderson 3D. La principale incertitude dans notre détermination expérimentale de l'exposant critique est due à des erreurs statistiques sur  $\Pi_0$  (voir section IV de notre article [120] reproduit en section E du chapitre 5) et à la durée limitée de l'expérience, qui empêche de parcourir le flot de renormalisation temporel sur une grande "distance", et ainsi d'approcher de près le point fixe critique (voir section C.2.2 du chapitre 2). Toutefois, les simulations numériques ne sont pas limitées à 150 kicks, mais peuvent être menées sur près d'un million de kicks, permettant de se rapprocher de la limite thermodynamique  $t \rightarrow \infty$ , et les incertitudes statistiques sur  $\langle l^2 \rangle$  peuvent être fortement réduites par une moyenne sur un grand nombre de conditions initiales. L'incertitude sur la détermination précédente de l'exposant critique  $\nu$  à partir des données numériques est donc principalement due à la procédure en elle-même, procédure échouant à reproduire la singularité de la fonction d'échelle au point critique [59].

Désirant déterminer l'exposant critique  $\nu$  avec une très bonne précision, une analyse fine du flot de renormalisation temporel, i.e. du comportement de  $\Lambda(K, t)$  en fonction de  $t$ , doit être effectuée (C.2.2 du chapitre 2). Lorsque l'on n'est pas au plus proche voisinage du point fixe critique, les variables non pertinentes du flot, celles qui convergent vers 0 à la limite thermodynamique  $t \rightarrow \infty$ , ne sont pas négligeables. Il faut donc en tenir compte [12], sous la forme de paramètres d'échelle non-pertinents (voir équation 2.49), non-pertinents au sens où leurs effets deviennent négligeables à la limite thermodynamique. En outre, une linéarisation du comportement au voisinage du point fixe hyperbolique n'est une bonne approximation que lorsqu'on est très proche de ce point fixe critique, i.e. lorsque  $K$  est très voisin de  $K_c$ . Pour des valeurs de  $K$  plus éloignées de  $K_c$ , des termes non-linéaires apparaissent qui doivent être pris en compte [12].

C'est une telle analyse fine du flot de renormalisation temporel que nous présentons dans notre article [133], publié dans la revue *Europhysics Letters*, et reproduit en section C de ce chapitre. Ceci nous permet, bien sûr, de déterminer précisément l'exposant critique  $\nu$ , mais surtout de vérifier son caractère universel, et de répondre à la question posée en début de ce chapitre.

## B Universalité du comportement critique du Kicked Rotor quasi-périodique

Généralement, l'universalité du comportement critique est démontrée en considérant différentes distributions de probabilité du désordre, par exemple la distribution boîte (2.8),

<sup>1</sup>Les valeurs  $\nu = 1.6 \pm 0.05$  et  $\nu = 1.59 \pm 0.01$  annoncées dans nos articles [37, 120] (reproduits au chapitre 5) résultent de l'étude que nous rapportons dans ce chapitre.

Gaussienne ou Lorentzienne, et en vérifiant l'insensibilité de l'exposant critique  $\nu$  vis-à-vis de ces choix [12,38]. Également, dans le cas de systèmes anisotropes, les propriétés critiques sont étudiées en fonction du degré d'anisotropie : tout comme dans le cas des transitions de phase thermodynamiques du second ordre (dans un modèle d'Ising 2D anisotrope par exemple [134,135]), les exposants critiques ne dépendent pas du degré d'anisotropie [39]. Cependant, d'autres paramètres critiques tels que le seuil de la transition sont sensibles aux détails microscopiques (voir [121–123] pour des études détaillées de la dépendance du désordre critique suivant l'anisotropie).

Dans le cas du Kicked Rotor quasi-périodique, la distribution du désordre ne peut être choisie librement. Le désordre pseudo-aléatoire associé à ce système (voir section A.2.2 du chapitre 5) :

$$\mathcal{V}_l = \tan \left[ \frac{1}{2} \left( \omega - k \frac{l_1^2}{2} + \omega_2 l_2 + \omega_3 l_3 \right) \right], \quad (6.1)$$

est distribué suivant une Lorentzienne (voir section B.2 du chapitre 3), comme dans le cas du modèle de Loyd [91]. Cependant, nous avons déjà vu que les propriétés de localisation dépendent de façon sensible du choix des paramètres du pseudo-désordre, notamment de  $k$  (voir section A.2.2 du chapitre 5). Ainsi, une condition pour l'observation de la localisation dynamique avec le Kicked Rotor périodique est de se placer suffisamment loin des résonances quantiques simples, i.e. de prendre  $k/2\pi$  suffisamment irrationnel (ceci se quantifie par la condition que la fraction continue de ce rapport doit être constituée de petits entiers). Pour ce qui est du Kicked Rotor quasi-périodique,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  jouent également un rôle important. Pour observer la transition d'Anderson, il faut que ces fréquences soient telles que  $(k, \omega_2, \omega_3, \pi)$  est un quadruplet incommensurable. Si cette condition n'est pas vérifiée, alors les propriétés de transport peuvent être toutes autres que celles prédites pour un système désordonné 3D. Par exemple, si  $\omega_2$  est un multiple rationnel de  $\pi$ , alors le potentiel  $\mathcal{V}_l$  est périodique suivant la direction “2” : le Kicked Rotor quasi-périodique est dans ce cas l'équivalent d'un système désordonné quasi-2D (de taille transverse égale à la période spatiale suivant “2”), i.e. est toujours localisé. Comme l'ensemble de ces valeurs “écueils” à éviter est dense, on ne peut pas, a priori, en faire abstraction. Ainsi, certains mauvais choix de fréquences proches d'un écueil peuvent conduire à des résonances qui doivent affecter les propriétés de transport. Cela doit être le cas, par exemple lorsqu'il existe deux petits entiers  $r_2$  et  $r_3$  tels que  $r_2 \omega_2 + r_3 \omega_3 \approx 0$ . Une étude de ce type de résonances a été menée dans le cadre d'un “double Kicked Rotor” où les propriétés de transport quantique dépendent fortement de ce que les périodes de chaque série de kicks sont en rapport incommensurable ou non. Il a été montré, à la fois numériquement et expérimentalement, que la sensibilité de ce système à la commensurabilité des périodes est sub-Fourier [111].

Dans notre article [133] reproduit à la section suivante C, nous étudions si oui ou non le comportement critique du Kicked Rotor quasi-périodique est sensible au choix des paramètres  $k$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  [vérifiant la condition d'incommensurabilité de  $(k, \omega_2, \omega_3, \pi)$ ]. En outre, puisque notre système est également anisotrope (voir section A.2.2 du chapitre 5), nous étudions également si l'exposant critique  $\nu$  est sensible au choix du facteur d'anisotropie  $\varepsilon$ .

## C Article publié dans *Europhysics Letters* : “Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic Kicked Rotor”

Nous reproduisons dans cette section notre article [133] intitulé “Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic Kicked Rotor”, publié dans la revue *Europhysics Letters*.





## Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor

G. LEMARIÉ<sup>1(a)</sup>, B. GRÉMAUD<sup>1,2</sup> and D. DELANDE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire Kastler Brossel, UPMC, ENS, CNRS - 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France, EU*

<sup>2</sup> *Centre for Quantum Technologies, National University of Singapore - 3 Science Drive 2, Singapore 117543, Singapore*

received 15 April 2009; accepted in final form 21 July 2009

published online 26 August 2009

PACS 72.15.Rn – Localization effects (Anderson or weak localization)

PACS 03.75.-b – Matter waves

PACS 71.30.+h – Metal-insulator transitions and other electronic transitions

**Abstract** – We report a numerical analysis of the Anderson transition in a quantum-chaotic system, the quasiperiodic kicked rotor with three incommensurate frequencies. It is shown that this dynamical system exhibits the same critical phenomena as the truly random 3D Anderson model. By taking proper account of systematic corrections to one-parameter scaling, the universality of the critical exponent is demonstrated. Our result  $\nu = 1.59 \pm 0.01$  is in perfect agreement with the value found for the Anderson model.

Copyright © EPLA, 2009

**Introduction.** – It is now widely acknowledged that the classical diffusive behavior of non-interacting electrons in a disordered potential can be stopped by non-trivial interference effects [1]. This puzzling phenomenon, Anderson localization, constitutes one strong evidence of the very difference between quantum and classical dynamics of complex systems. A similar phenomenon is observed in the dynamics of the quantum kicked rotor, a paradigmatic system of quantum chaos: the dynamical localization, where quantum-mechanical interference tend to suppress the classical chaotic diffusive dynamics. The discovery of the parallel between dynamical localization and Anderson localization originated from the mapping of the kicked rotor to the quasirandom 1D Anderson model [2]. In ref. [3] it was demonstrated that the kicked rotor in the dynamical localization regime could be modeled by random band matrices; the latter have been reduced to a 1D non-linear  $\sigma$ -model [4] similar to those employed in the localization theory [5]. In ref. [6] the direct correspondence between the kicked rotor and the diffusive supersymmetric nonlinear  $\sigma$ -model was demonstrated. In the localized regime, the kicked rotor *exactly* mimics the behavior of disordered electronic conductors.

There has been much experimental efforts to observe Anderson localization in 3D. However, due to stray effects like interaction, decoherence or absorption, very few attempts have been successful [7]. In a slightly

different context, Anderson localization of acoustic [8] and electromagnetic [9–12] waves has been experimentally observed. The experimental realization of the kicked rotor with laser-cooled atoms interacting with a pulsed standing wave allowed for the first experimental observation of Anderson localization in 1D with atomic matter waves [13]. One step further is to observe the well-known Anderson *transition* with this type of system, *i.e.* the disorder induced metal-insulator transition predicted for non-interacting electrons in a 3D disordered potential. Different generalizations of the kicked rotor have been theoretically considered as analogs of the 3D Anderson model [14]. Here, we focus on the convenient three-incommensurate-frequencies generalization introduced in ref. [15]. Very recently an experiment based on this system has fully characterized the Anderson metal-insulator transition [16]: a careful analysis of the scaling properties of the dynamics resulted in the first experimental determination of the localization length critical exponent  $\nu$ . The value found  $\nu = 1.4 \pm 0.3$  is compatible with the precedent numerical determination of  $\nu = 1.57 \pm 0.02$  for the true-random 3D Anderson model [17].

At this stage, the equivalence between the quasiperiodic kicked rotor [16] and 3D-disordered conductors still has the status of a conjecture (see [18]). A rigorous answer to the question whether this dynamical system exhibits the same critical phenomena — *i.e.* belongs to the same universality class — as the true 3D Anderson model has not

<sup>(a)</sup>E-mail: lemarie@spectro.jussieu.fr

G. Lemarié *et al.*

yet been given. Can a simple three-frequency dynamical system exactly mimic the critical behavior of 3D disordered electronic conductors? In this letter, we show that the answer is positive. This is done by carrying out a very precise numerical study of the critical behavior of the quasiperiodic kicked rotor *with the same care* as in the most sophisticated investigations of the critical behavior of the true 3D Anderson model [17,19,20]. The fact that both models give the same localization length critical exponent  $\nu$  within comparable (small) uncertainties implies that they belong to the same universality class (orthogonal) [21].

**The quasiperiodic kicked rotor.** – The quasiperiodic kicked rotor we consider is a three-incommensurate-frequencies generalization of the kicked rotor:

$$H_{qp} = \frac{p^2}{2} + K(t) \cos \theta \sum_n \delta(t - n), \quad (1)$$

obtained simply by modulating the amplitude of the standing-wave pulses with a set of two new incommensurate frequencies  $\omega_2$  and  $\omega_3$  of modulation:

$$K(t) = K [1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \cos(\omega_3 t + \varphi_3)]. \quad (2)$$

Here we consider the case with an effective Planck constant  $\hbar = -i[\theta, p]$ . For a standard rotor,  $\theta$  is an angle defined modulo  $2\pi$  and the wave function thus has to be  $2\pi$  periodic. In the atomic realization of the kicked rotor [16], the Hamiltonian is still given by eq. (1), with  $\theta$  extended in the  $(-\infty, +\infty)$  range. Using the Bloch theorem, one can restrict to  $2\pi$  periodic functions, at the (cheap) price of including a constant quasi-momentum.

The dynamics of this quasiperiodic kicked rotor is *identical* to the time-evolution of a 3D-kicked rotor:

$$H_3 = \frac{p_1^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + K \cos \theta_1 [1 + \varepsilon \cos \theta_2 \cos \theta_3] \sum_n \delta(t - n), \quad (3)$$

with an initial condition:

$$\Psi_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t=0) \equiv \Psi_{qp}(\theta_1, t=0) \delta(\theta_2 - \varphi_2) \delta(\theta_3 - \varphi_3), \quad (4)$$

where  $\Psi_{qp}(\theta, t=0)$  is an arbitrary initial condition for the quasiperiodic kicked rotor. Note that dynamical localization takes place in momentum and not in configuration space. The initial state being perfectly localized in  $\theta_2$  and  $\theta_3$ , it is entirely delocalized in the conjugate momenta  $p_2$  and  $p_3$  so that we will study transport along the  $p_1$  direction, which is tantamount to measure the momentum distribution of the quasiperiodic kicked rotor  $|\Psi_{qp}(p, t)|^2$ . The unusual linear dependence of  $H_3$  with  $p_2$  and  $p_3$  does not prevent, for  $\varepsilon \neq 0$  the dynamics to be similarly diffusive or localized along the 3 coordinates.

The Hamiltonian  $H_3$  is invariant under the transformation  $T: t \rightarrow -t, \theta \rightarrow -\theta, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$ , *i.e.* the time reversal

in the momentum representation, which is the relevant one for dynamical localization (see [22,23]). In particular, the choice of a non-zero quasi-momentum and non-zero phases  $\varphi_2$  or  $\varphi_3$  does not break time reversal symmetry. The evolution of the states according to Hamiltonian (1) is governed by the operator  $U$  (see below, eq. (5)), belonging to the Circular Orthogonal Ensemble class [24], with the additional constraint (4) at  $t=0$ ; this shows that the dynamical properties of the present quasiperiodic kicked rotor also belong to the orthogonal ensemble.

It should also be noted that the 3D aspect comes from the fact that 3 frequencies are present in our dynamical system: the usual “momentum frequency”  $\hbar$  which is present in the standard kicked rotor (with  $\varepsilon=0$ ), and the two additional time-frequencies  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . By increasing the number of incommensurate frequencies, one should be able to tune the effective dimensionality of the system. This holds the promise of extending the study of the Anderson transition to higher dimensions.

From a stroboscopic point of view, the quantum dynamics of the 3D-kicked rotor eq. (3) is determined by its evolution operator over one period:

$$U = e^{-iK \cos \theta_1 (1 + \varepsilon \cos \theta_2 \cos \theta_3)/\hbar} \times e^{-i(p_1^2/2 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3)/\hbar}, \quad (5)$$

whose eigenstates form a basis set allowing to calculate the temporal evolution. These Floquet states  $|\phi\rangle$  are fully characterized by their quasienergy  $\omega$ , defined modulo  $2\pi$ :

$$U|\phi_\omega\rangle = e^{-i\omega}|\phi_\omega\rangle. \quad (6)$$

Equivalence with a 3D-Anderson tight-binding model can be obtained by reformulating eq. (6) for the Floquet states [2]:

$$\epsilon_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}} + \sum_{\mathbf{r} \neq 0} W_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{m}-\mathbf{r}} = -W_0 \Phi_{\mathbf{m}}, \quad (7)$$

where  $\mathbf{m} \equiv (m_1, m_2, m_3)$  and  $\mathbf{r}$  label sites on a 3D lattice, and the  $\Phi_{\mathbf{m}}$  are simply related to the Fourier components of the Floquet state  $|\phi_\omega\rangle$ . The on-site energy  $\epsilon_{\mathbf{m}}$  reads:

$$\epsilon_{\mathbf{m}} = \tan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \omega - \left( \hbar \frac{m_1^2}{2} + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 \right) \right] \right\}, \quad (8)$$

and the hopping amplitudes  $W_{\mathbf{r}}$  are coefficients of a threefold Fourier expansion of  $W(\boldsymbol{\theta}) = \tan[K \cos \theta_1 (1 + \varepsilon \cos \theta_2 \cos \theta_3)/2\hbar]$ .

When  $(\hbar, \omega_2, \omega_3, 2\pi)$  is an incommensurate quadruplet, the classical dynamics can become chaotic (for sufficiently large stochasticity parameter  $K \gtrsim 2$ ) with diffusive spreading in *all*  $\mathbf{m}$  directions [15]. The pseudo-random character of the potential  $\epsilon_{\mathbf{m}}$  then gives the disorder in the model (7). This pseudo-random disorder is not  $\delta$ -correlated, which implies that the quasiperiodic kicked rotor is not identical to the Anderson model. It is known that long-range potential correlations may affect in various ways (including destroy the localization) the Anderson

localization [25,26]; however, in our system, these long-range correlations are absent.

We therefore expect to observe localization effects as predicted for the standard 3D Anderson model. Localized states would be observed if the disorder strength is large as compared to the hopping amplitudes. In the case of model (7), while the amplitude of disorder is fixed, the hopping amplitudes increase with  $K$ . Therefore, for large  $K$  a diffusive regime should be observed, while for small  $K$  (though sufficiently large as to prevent classical localization effects) a localized regime is expected. This was validated both numerically [15] and experimentally [16].

**Finite-time scaling.** – In the case of the kicked rotor, the initial classical chaotic diffusion is stopped only after a certain characteristic time, the localization time  $\tau_\ell$  which turns out to be roughly proportional to the localization “length” (characterizing the exponential localization in momentum space) [27]:  $\tau_\ell \propto \ell$ . In 3D, the localization time scales as  $\tau_\ell \sim \ell^3$ . Thus for very large localization length,  $\tau_\ell$  may exceed the largest time accessible (the maximum duration of a cold-atoms experiment is typically 150 kicks [16] whereas numerical investigations can go up to  $10^6$  kicks). Consequently, it is vain to investigate the Anderson transition only from static properties of the quasiperiodic kicked rotor, such as the divergence of the localization length at criticality, which could be obtained only for  $t \gg \tau_\ell$ . Note however that some useful information can be extracted from the statistical properties of the energy levels (the Floquet quasi-energies in our specific case of a kicked system), which display marked changes at the transitions [24,26,28].

Actually, these finite-time effects are similar to finite-size effects for the study of classical or quantum phase transitions. We can generalize the usual scaling laws to cover our time-dependent problem. The single parameter scaling theory, successfully used for the standard (static) 3D Anderson model [29–31], can be applied to analyze the dynamics (see [16]) and especially to determine the critical properties of the Anderson transition, *i.e.* the critical exponents.

The dynamics of the quasiperiodic kicked rotor is conveniently studied by considering the time-evolution of the variance of the momentum distribution  $\langle p^2 \rangle$ , the average being taken over several initial conditions, which corresponds to an average over disorder. We can make the following scaling hypothesis for this quantity [32]:

$$\langle p^2 \rangle = t^{k_1} F[(K - K_c) t^{k_2}], \quad (9)$$

with  $F$  a function characteristic of the transition (to be determined) and  $k_1$  and  $k_2$  two exponents which can be constrained as explained in the following.  $K_c$  is the critical value of the stochasticity parameter. We must recover as  $t \rightarrow \infty$  either a diffusive behavior  $\langle p^2 \rangle \sim Dt$  when  $K > K_c$  or a localized dynamics  $\langle p^2 \rangle \sim \ell^2$  when  $K < K_c$ . In the vicinity of the transition, the diffusion constant  $D \sim (K - K_c)^s$  vanishes with the critical exponent  $s$  and

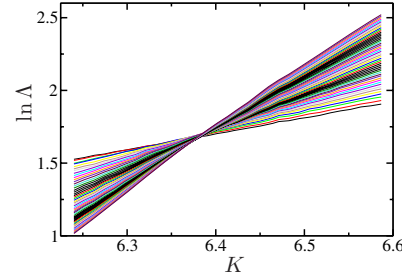


Fig. 1: (Color online) Dynamics of the quasiperiodic kicked rotor in the vicinity of the critical regime. The rescaled quantity  $\ln \Lambda(K, t)$  is plotted as a function of  $K$  for various values of time  $t$  ranging from  $t = 30$  to  $t = 40000$ . The crossing of the different curves at a common point ( $K_c \simeq 6.4$ ,  $\ln \Lambda_c \simeq 1.6$ ) indicates the occurrence of the metal-insulator transition. The parameters are that of the set  $\mathcal{A}$  (see table 1).

the localization length  $\ell \sim (K_c - K)^{-\nu}$  diverges with the critical exponent  $\nu$ . Wegner’s law [33]  $s = \nu$  in three dimensions, then leads to  $k_1 = 2/3$  and  $k_2 = 1/3\nu$  [34].

Therefore, to analyze the scaling of the dynamics, the behavior of the quantity  $\Lambda = \langle (p/k)^2 \rangle t^{-2/3}$  should be investigated as a function of time and for various stochasticity parameters. Such a study was undertaken in [16] and allowed for a successful experimental characterization of the Anderson transition. In order to tackle the problem of universality of the critical behavior, we have to go one step further and study whether the critical exponent  $\nu$  changes when parameters such as  $k$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  are modified.

The following discussion is rather intricate but cannot be avoided in a rigorous study. Indeed, to reliably distinguish the different universality classes of the Anderson transition requires a very precise determination of the critical exponent; for instance, the value  $\nu = 1.43 \pm 0.04$  for the unitary symmetry class is very close to the one for the orthogonal symmetry class [19]. For a very accurate determination of  $\nu$ , possible systematic deviations to one-parameter scaling must be taken into account.

**Systematic corrections to scaling.** – Let us consider the scaling function  $\mathcal{F} \equiv \ln(F/k^2)$  in the vicinity of the critical point:

$$\ln \Lambda = \mathcal{F}[(K - K_c) t^{1/3\nu}]. \quad (10)$$

One simple feature of the scaling hypothesis eq. (10) is that when  $\ln \Lambda$  is plotted against  $K$ , the curves for different times  $t$  should intersect at the common point ( $K_c, \ln \Lambda_c = \mathcal{F}(0)$ ); this crossing, which indicates the occurrence of the metal-insulator transition, is clearly visible in fig. 1.

In practice, the data do not exactly follow eq. (10). There are small systematic deviations to scaling. Here, we consider several ways in which such corrections can arise (see below for a detailed discussion of each correction): i) the presence of an irrelevant scaling variable, ii) the non-linear dependence of the scaling variables in the

G. Lemarié *et al.*

stochasticity parameter  $K$  and iii) resonances due to the periods being well approximated by a ratio of small integers. iii) is specific to our three-frequency dynamical system, but i) and ii) were shown to play an important role in the standard Anderson model [17]. Note that the most important correction to scaling is a time dependence of  $\ln \Lambda$  at  $K = K_c$  either due to i) or iii).

The well-known deviations i) and ii) can be taken into account by adding extra terms to (10) [17]. i) The scaling function  $\mathcal{F}$  depends not only on the relevant scaling variable  $\chi_r$  (*i.e.* a function of  $K - K_c$ ), but also on an irrelevant scaling variable  $\psi$ :

$$\ln \Lambda = \mathcal{F}(\chi_r t^{1/3\nu}, \psi t^{-y}). \quad (11)$$

Since  $\psi$  is an irrelevant scaling parameter, its effects should vanish as  $t$  goes to infinity, thus  $y$  must be positive. ii) Non-linearity in the relevant scaling variable  $\chi_r$  can be described by an expansion in terms  $K - K_c$  up to order  $m_R$ .

To define a fitting function  $\mathcal{F}_f$ , we can then make a Taylor expansion of the scaling function  $\mathcal{F}$  up to order  $n_R$  in  $\chi_r t^{1/3\nu}$  and  $n_I$  in  $\psi t^{-y}$ :

$$\mathcal{F}_f(K, t) = \sum_{m=0}^{n_R} \sum_{n=0}^{n_I} \chi_r^m t^{m/3\nu} \psi^n t^{-ny} \mathcal{F}_{m,n}. \quad (12)$$

We now discuss the qualitative nature of the correction due to the presence of an irrelevant scaling variable i) as compared to the effect of resonances iii). In case i),  $\ln \Lambda_c = \ln \Lambda(K = K_c)$  will shift in a monotonous way as time increases and converge to its thermodynamic limit  $\ln \Lambda_c(t = \infty)$  [ $\ln \Lambda_c(t) = \mathcal{F}_{0,0} + t^{-y} \mathcal{F}_{0,1}$  in the linear regime ( $m_R = n_R = n_I = 1$ )]. In the case of our three-frequency dynamical system, the data do not always fit such a monotonous evolution model for  $\ln \Lambda_c(t)$ . Indeed, for a generic choice of incommensurate periods, the data are found to oscillate around their transient anomalous diffusive dynamics, see fig. 2.

We infer that such an oscillating correction to scaling arises in a resonant way: when the frequencies can be approximately related by a simple linear combination (*i.e.* involving small integers), a resonance occurs. This is a rather common phenomenon in multi-frequency dynamical systems. The phase and the amplitude of the oscillations in fig. 2 depend on the choice of the phases  $\varphi_2$  and  $\varphi_3$  of the time-modulation (see eq. (2)), *i.e.* on the initial state in eq. (4). From the point of view of the Anderson-like model eq. (7), resonances can be interpreted as correlations in the disordered potential. Hence, to perform the standard scaling analysis devised for the Anderson model with uncorrelated disorder [17], we shall retain data only for sufficiently long times (say  $t \geq 1000$ ) and average over different initial conditions, *i.e.* different quasi-momenta and phases  $\varphi_2$  and  $\varphi_3$ .

We computed  $\ln \Lambda$  for times up to  $t = 10^6$  kicks with an accuracy of 0.15%. To achieve this accuracy more than

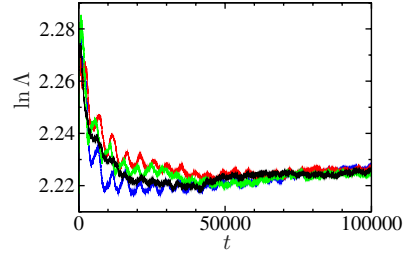


Fig. 2: (Color online) Small oscillating corrections to the scaling behavior in the critical regime. The parameters are the following:  $k = 2.89$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$ ,  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ ,  $K = 7.8$  and  $\varepsilon = 0.3$ . Color curves correspond to various choices of the phases  $\varphi_2$  and  $\varphi_3$  (see eq. (1)) whereas the black curve results from a statistical average over different phases. The amplitudes of the quasi-resonant oscillations decrease as time goes on. Averaging over the phases kills the rapidly oscillating structures, while keeping all of the other dynamical properties unchanged.

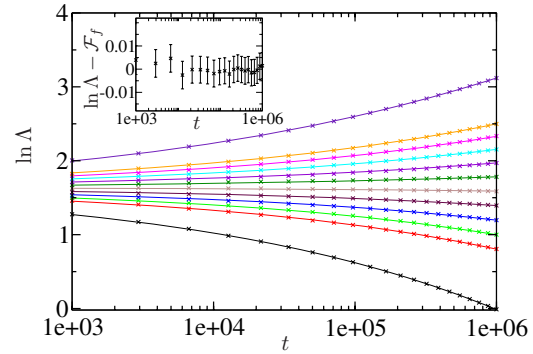


Fig. 3: (Color online)  $\ln \Lambda$  as a function of time  $t$ . The curves are fits of the data according to the model  $\mathcal{F}_f$  (see eq. (12)) with  $n_R = 3$ ,  $m_R = 2$ ,  $n_I = 1$ . The parameters are that of the set  $\mathcal{D}$  (see table 1). The inset shows the deviations of the data (corresponding to  $K = 7.9$ ) to the most likely fit, showing no statistically significant deviation.

1000 initial conditions are required. To analyze data over the full range of times  $t \in [10^3, 10^6]$ , we fit the model eq. (12) to the data. Note that the inclusion of the corrections i) and ii) in eq. (12) leads to a rapid increase in the number of fitting parameters. That is why high quality data with a wide range of variation of  $t^{1/3}$  are needed if meaningful fits are to be obtained.

The most likely fit is determined by minimizing the  $\chi^2$  statistics measuring the deviation, due to the numerical uncertainties, between the model and data. Some typical numerical data and the associated fit are displayed in fig. 3. To exhibit scaling, we subtract the corrections due to the irrelevant scaling variable [17] obtaining the corrected quantity  $\ln \Lambda_s$ . As seen in fig. 4, all data collapse almost perfectly on the scaling function deduced from the model  $\mathcal{F}_f$ .

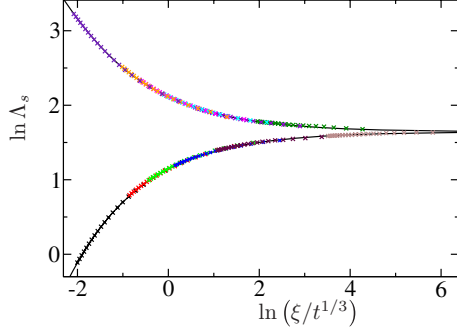


Fig. 4: (Color online)  $\ln \Lambda_s$ , the data in fig. 3 after subtraction of corrections due to the irrelevant scaling variable, plotted *vs.*  $\ln(\xi/t^{1/3})$  where  $\xi = |\chi_r|^{-\nu}$  and the scaling function deduced from the model  $\mathcal{F}_f$ , eq. (12) (black curve). The parameters are that of the set  $\mathcal{D}$  (see table 1). The best fit estimates of the critical stochasticity and the critical exponent are:  $K_c = 8.09 \pm 0.01$ ,  $\ln \Lambda_c = 1.64 \pm 0.03$  and  $\nu = 1.59 \pm 0.01$ .

Table 1: The four sets of parameters considered:  $\tilde{k}$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$  control the microscopic details of the disorder, while  $\epsilon$  drives the anisotropy of the hopping amplitudes. In  $\mathcal{C}$ ,  $\omega_2/\omega_3 = \eta$  where  $\eta$  is the silver number (see below), and the continuous fraction of  $\tilde{k}/\pi$  is constituted of small integers.  $\mathcal{D}$  is such that  $\tilde{k} = \alpha$ ,  $\omega_2 = \alpha/\eta$  and  $\omega_3 = \alpha/\eta^2$  where  $\eta = 1.324717\dots$  the real root of the equation  $\eta^3 - \eta - 1 = 0$ , and  $\alpha$  is such that the continuous fractions of  $\tilde{k}/\pi = \alpha/\pi$ ,  $\omega_2/\pi = \alpha/\eta\pi$  and  $\omega_3/\pi = \alpha/\eta^2\pi$  are constituted of small ( $< 9$ ) integers [35].

	$\tilde{k}$	$\omega_2$	$\omega_3$	$K$	$\epsilon$
$\mathcal{A}$	2.85	$2\pi\sqrt{5}$	$2\pi\sqrt{13}$	$6.24 \rightarrow 6.58$	$0.413 \rightarrow 0.462$
$\mathcal{B}$	2.85	$2\pi\sqrt{7}$	$2\pi\sqrt{17}$	$5.49 \rightarrow 5.57$	$0.499 \rightarrow 0.514$
$\mathcal{C}$	2.2516	$1/\eta$	$1/\eta^2$	$4.98 \rightarrow 5.05$	$0.423 \rightarrow 0.436$
$\mathcal{D}$	3.5399	$\tilde{k}/\eta$	$\tilde{k}/\eta^2$	$7.9 \rightarrow 8.3$	$0.425 \rightarrow 0.485$

No significant deviation of the scaling function from the fit is observed. The goodness of fit  $Q$  has been determined using the  $\chi^2$  distribution with  $N_d - N_p$  degrees of freedom where  $N_d$  is the total number of data we used to fit the model and  $N_p$  is the total number of fitting parameters (see table 1). The confidence intervals (one standard deviation) for the fitted parameters were estimated using the bootstrap method which yields Monte Carlo estimates of the errors in the fitted parameters.

**Universality.** – A key property of the Anderson transition is that it is a continuous (*i.e.* second order) phase transition whose critical behavior can be described in a framework of universality classes [5]. This means that the critical exponents should not be sensitive to the microscopic details of the disordered potential but should depend only on the underlying symmetries (*e.g.* time reversal symmetry). We present here new material that allows us to numerically prove that this is indeed the

Table 2: Parameters used for the four sets of data: type of fit (see eq. (12)), number of data points  $N_d$ , number of parameters  $N_p$ , value of  $\chi_r^2$  for the best fit and goodness of fit  $Q$ . Time ranges from  $t = 10^3$  to  $t = 10^6$ .

	$n_R$	$n_I$	$m_R$	$N_d$	$N_p$	$\chi_r^2$	$Q$
$\mathcal{A}$	3	1	2	800	12	236	1
$\mathcal{B}$	2	1	1	600	9	278	1
$\mathcal{C}$	2	1	1	1000	9	934	0.9
$\mathcal{D}$	3	1	2	1212	12	917	0.999

Table 3: Best fit estimates of the critical parameters  $K_c$  and  $\ln \Lambda_c$ , the critical exponent  $\nu$  together with their uncertainty (one standard deviation).  $\nu$  is expected to be universal whereas  $\ln \Lambda_c$  and  $K_c$  do depend on anisotropy [36] and  $\tilde{k}$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . Irrelevant parameters are sensitive to microscopic details, therefore  $y$  is strictly positive and not universal.

	$K_c$	$\ln \Lambda_c$	$\nu$	$y$
$\mathcal{A}$	$6.36 \pm 0.02$	$1.60 \pm 0.04$	<b><math>1.58 \pm 0.01</math></b>	$0.71 \pm 0.28$
$\mathcal{B}$	$5.53 \pm 0.03$	$1.08 \pm 0.09$	<b><math>1.60 \pm 0.03</math></b>	$0.33 \pm 0.30$
$\mathcal{C}$	$5.00 \pm 0.03$	$1.19 \pm 0.15$	<b><math>1.60 \pm 0.02</math></b>	$0.23 \pm 0.29$
$\mathcal{D}$	$8.09 \pm 0.01$	$1.64 \pm 0.03$	<b><math>1.59 \pm 0.01</math></b>	$0.43 \pm 0.23$

case for the quasiperiodic kicked rotor, thus strengthening the fact that this system is in the same universality class than the truly random Anderson transition.

We have carried on a *detailed* study of four cases characterized by different set of parameters, see (table 1):  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are both optimal set of parameters for experimental studies (see [16]), while  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  are rather for theoretical/numerical considerations.  $\mathcal{C}$  is a first step towards an ideal choice of parameters:  $\omega_2/\omega_3 = \eta$  where  $\eta$  is the silver number (see below), and the continuous fraction of  $\tilde{k}/\pi$  is constituted of small integers (to prevent the system to be close to a resonance).  $\mathcal{D}$  should be a “best choice” of parameters if we seek the least correlations in the disorder eq. (8). It is such that  $\tilde{k}$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  and  $\pi$  are a “most incommensurate” *quadruplet* of numbers. As suggested in [14], we set  $\tilde{k} = \alpha$ ,  $\omega_2 = \alpha/\eta$  and  $\omega_3 = \alpha/\eta^2$  where  $\eta = 1.324717\dots$  (the silver number which generalizes the golden number for triplet instead of pair of incommensurate numbers [35]) is the real root of the equation  $\eta^3 - \eta - 1 = 0$ , and  $\alpha = 3.5399\dots$  is such that the continuous fractions of  $\tilde{k}/\pi = \alpha/\pi$ ,  $\omega_2/\pi = \alpha/\eta\pi$  and  $\omega_3/\pi = \alpha/\eta^2\pi$  are constituted of small ( $< 9$ ) integers.

The details of the simulations and the types of fit used to analyze those sets are listed in table 2. The estimated critical parameters and their confidence intervals are given in table 3. Some *typical* data and scaling functions are drawn in figs. 3 and 4.

The most important conclusion to be drawn from table 3 is that the estimates of the exponent  $\nu$  for the four different



G. Lemarié *et al.*

sets are in almost perfect agreement with each other and with the estimate of  $\nu$  based on numerical studies of the truly random Anderson model  $\nu = 1.57 \pm 0.02$  of the orthogonal symmetry class [17]. Note also that in the case of the quasiperiodic kicked rotor, the critical stochasticity  $K_c$  and  $\ln \Lambda_c$  depend on: i) the anisotropy governed by the parameter  $\epsilon$  and ii)  $k$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . The dependence i) of the critical disorder and critical  $\ln \Lambda$  on anisotropy is a typical feature of the Anderson transition in anisotropic solids [20]. The dependence ii) follows from the relation between the initial “classical” diffusion constant and the parameters  $k$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$  [27].

The Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor is a robust feature: indeed, the “naive” choices of parameters, set  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$ , lead to very clean critical behaviors, as clean as for the sophisticated choices of parameters, sets  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$ . Our experience is that for certain mutually incommensurate triplets  $(k, \omega_2, \omega_3)$  systematic deviations to scaling (such as resonances) can occur for intermediate times, but eventually vanish.

**Conclusion.** – A numerical analysis of the critical behavior of the quasiperiodic kicked rotor has shown that this quantum-chaotic system exhibits the same critical phenomena as the truly random Anderson model, *i.e.* both systems belong to the same (orthogonal) universality class [21]. By taking proper account of corrections to the scaling property around criticality, the universality of the critical exponent  $\nu$  for the quasiperiodic kicked rotor was demonstrated. The critical exponent  $\nu$  was determined with an accuracy better or comparable to the one achieved in previous numerical studies of the 3D Anderson model [17,19,20]. Our result  $\nu = 1.59 \pm 0.01$  is in perfect agreement with the value found for the orthogonal symmetry class [17]. It is clearly distinct from the value found for the unitary class  $\nu = 1.43 \pm 0.04$  [19], and from the predictions  $\nu = 1$  of the self-consistent theory of localization [37] and  $\nu = 1.5$  of a recent *ad hoc* refinement of the self-consistent theory [38].

\*\*\*

We thank J. C. GARREAU, P. SZRIFTGISER, J. CHABÉ, H. LIGNIER and F. FARAGO for many interesting and fruitful discussions.

## REFERENCES

- [1] ANDERSON P. W., *Phys. Rev.*, **109** (1958) 1492.
- [2] FISHMAN S., GREMPER D. R. and PRANGE R. E., *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982) 509.
- [3] CASATI G., GUARNERI I., IZRAILEV F. and SCHARF R., *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 5.
- [4] FYODOROV Y. V. and MIRLIN A. D., *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 2405.
- [5] EFETOV K., *Supersymmetry in Disorder and Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, UK) 1997.
- [6] ALTLAND A. and ZIRNBAUER M. R., *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 4536.
- [7] JANSSEN M., *Phys. Rep.*, **295** (1998) 1.
- [8] HEFEI H., STRYBULEVYCH A., PAGE J. H., SKIPETROV S. E. and VAN TIGGELEN B. A., *Nat. Phys.*, **4** (2008) 945.
- [9] CHABANOV A. A., STOYTCHIEV M. and GENACK A. Z., *Nature (London)*, **404** (2000) 850.
- [10] WIERSMA D. S., BARTOLINI P., LAGENDIJK A. and RIGHINI R., *Nature (London)*, **390** (1997) 671.
- [11] STÖRZER M., GROSS P., AEGERTER C. M. and MARET G., *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006) 063904.
- [12] SCHWARTZ T., BARTAL G., FISHMAN S. and SEGEV B., *Nature (London)*, **446** (2007) 52.
- [13] MOORE F. L., ROBINSON J. C., BHARUCHA C., WILLIAMS P. E. and RAIZEN M. G., *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 2974.
- [14] WANG J. and GARCÍA-GARCÍA A. M., *Phys. Rev. E*, **79** (2009) 036206.
- [15] CASATI G., GUARNERI I. and SHEPELYANSKY D. L., *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989) 345.
- [16] CHABÉ J., LEMARIÉ G., GRÉMAUD B., DELANDE D., SZRIFTGISER P. and GARREAU J. C., *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 255702.
- [17] SLEVIN K. and OHTSUKI T., *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 382.
- [18] BASKO D. M., SKVORTSOV M. A. and KRAVTSOV V. E., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 096801.
- [19] SLEVIN K. and OHTSUKI T., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 4083.
- [20] MILDE F., RÖMER R., SCHREIBER M. and V. U., *Eur. Phys. J. B*, **15** (2000) 685.
- [21] EVERS F. and MIRLIN A. D., *Rev. Mod. Phys.*, **80** (2008) 1355.
- [22] SCHARF R., *J. Phys. A*, **22** (1989) 4223.
- [23] BLÜMEL R. and SMILANSKY U., *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 217.
- [24] GARCÍA-GARCÍA A. M. and WANG J., *Acta Phys. Pol. A*, **112** (2007) 635.
- [25] TESSIERI L., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35** (2002) 9585.
- [26] CARPENA P., BERNAOLA-GALVÁN P. and IVANOV P. CH., *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004) 176804.
- [27] SHEPELYANSKY D. L., *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 677.
- [28] LEMARIÉ G. *et al.*, unpublished (2009).
- [29] ABRAHAMS E., ANDERSON P. W., LICCIARDELLO D. C. and RAMAKRISHNAN T. V., *Phys. Rev. Lett.*, **42** (1979) 673.
- [30] MACKINNON A. and KRAMER B., *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981) 1546.
- [31] PICHARD J. L. and SARMA G., *J. Phys. C*, **14** (1981) L127.
- [32] STAUFFER D. and AHARONY A., *Introduction to Percolation Theory*, 2nd edition (Taylor and Francis) 1994.
- [33] WEGNER F., *Z. Phys. B*, **25** (1976) 327.
- [34] OHTSUKI T. and KAWARABAYASHI T., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66** (1997) 314.
- [35] KIM S.-H. and OSTLUND S., *Phys. Rev. A*, **34** (1986) 3426.
- [36] PANAGIOTIDES N. A., EVANGELOU S. N. and THEODOROU G., *Phys. Rev. B*, **49** (1994) 14122.
- [37] VOLLHARDT D. and WÖLFLE P., *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 699.
- [38] GARCÍA-GARCÍA A. M., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 076404.



# Dynamique d'un paquet d'ondes au seuil de la transition d'Anderson

## Sommaire

<b>A</b>	<b>Montage expérimental . . . . .</b>	<b>63</b>
A.1	Piège magnéto-optique . . . . .	65
A.2	Onde stationnaire pulsée . . . . .	65
A.3	Vélocimétrie Raman . . . . .	68
<b>B</b>	<b>Déviations du dispositif expérimental au modèle théorique . .</b>	<b>73</b>
B.1	Durée finie des impulsions d'onde stationnaire . . . . .	73
B.2	Inhomogénéité de $K$ . . . . .	75
<b>C</b>	<b>Sources de décohérence . . . . .</b>	<b>77</b>
C.1	Collisions atomiques . . . . .	77
C.2	Émission spontanée . . . . .	79
C.3	Inclinaison de l'onde stationnaire . . . . .	79
<b>D</b>	<b>Conditions pour l'observation des effets de localisation . . . . .</b>	<b>81</b>

**A**u seuil de la transition d'Anderson, la fonction d'onde n'est ni localisée, ni diffusive, mais intermédiaire. Ses caractéristiques sont tout à fait non-triviales (invariance d'échelle, multi-fractalité, etc.) et ont attiré récemment un très grand intérêt, tant sur le plan théorique [40], qu'expérimental [76].

Le Kicked Rotor quasi-périodique est particulièrement bien adapté pour l'étude de l'état critique. La distribution en impulsion est directement observable expérimentalement (voir section A.3 du chapitre 4), et la simulation numérique de l'évolution temporelle est grandement facilitée par le caractère uni-dimensionnel de ce système. En particulier, on peut travailler avec des tailles  $L$  d'échantillon très grandes permettant de calculer la dynamique aux temps longs sans être confronté à des effets de taille finie.

Considérant l'évolution temporelle d'un paquet d'ondes, il est naturel d'essayer d'utiliser la théorie auto-cohérente pour rendre compte des observations. On a vu en effet que cette



théorie décrit la probabilité de diffusion quantique qui donne le transport en intensité (voir section C.1 du chapitre 2). Qui plus est, des études récentes de la localisation d'ondes classiques (ultrasons et micro-ondes -voir section D.3 du chapitre 2 et [24, 136]) ont démontré la validité de la théorie auto-cohérente dans la dynamique de la localisation forte. Que nous puissions appliquer la théorie auto-cohérente au cas de notre système quantique chaotique n'est pas évident a priori. C'est pourquoi nous donnons, en annexe, une théorie diagrammatique perturbative du transport quantique dans le Kicked Rotor au régime de faible désordre, prolongée par une théorie auto-cohérente permettant de décrire le régime de fort désordre, i.e. la localisation d'Anderson et la transition d'Anderson. Nous déduisons de cette théorie la forme et la dynamique de la fonction d'onde critique pour le Kicked Rotor quasi-périodique à la transition d'Anderson. Nos prédictions théoriques sont trouvées en excellent accord avec les observations expérimentales et numériques. Néanmoins, à temps longs, des déviations à la théorie auto-cohérente sont observées qui reflètent le caractère multi-fractal du régime critique.

## A Fonction d'onde critique telle que déduite de la théorie auto-cohérente

Dans cette section, nous considérons d'abord les propriétés de transport du Kicked Rotor 3D *isotrope* (5.1) au régime critique. Nous verrons ensuite comment déduire de ces propriétés les caractéristiques de la dynamique critique du Kicked Rotor quasi-périodique, qui correspond à un Kicked Rotor 3D anisotrope avec source plane (voir section A.2 du chapitre 5).

Les propriétés de la transition d'Anderson que nous avons observée sont assez bien reproduites par la théorie auto-cohérente (voir annexe B). Cette théorie décrit la probabilité de diffusion quantique  $P(\mathbf{l}, t)$  dans le régime hydrodynamique (i.e. aux temps longs et aux grandes distances). Lorsque le désordre est faible,  $k \equiv K/\bar{k} \gg 1$  (la notation  $k = K/\bar{k}$  sera tout le temps utilisée dans la suite), le transport est diffusif et la transformée de Fourier de  $P$  par rapport à  $\mathbf{l}$  et à  $t$  revêt un pôle diffusif :

$$P(\boldsymbol{\varphi}, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D\boldsymbol{\varphi}^2}, \quad (7.1)$$

où  $D$  est la constante de diffusion classique chaotique, telle que  $\langle \mathbf{l}^2 \rangle = 2dDt$ , avec  $d = 3$  la dimensionnalité de l'espace. Lorsque le désordre augmente, les effets interférentiels en présence de désordre restreignent le transport diffusif, ce qui conduit éventuellement à la localisation forte. Ceci peut être décrit en considérant une constante de diffusion dépendant de la fréquence  $D(\omega)$ , et vérifiant l'équation auto-cohérente suivante (voir section C.1 du chapitre 2 et annexe B) :

$$D(\omega) = D - 2D(\omega) \int \frac{d^3\Phi}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\Phi^2}. \quad (7.2)$$

Cette relation est fondamentale, car elle donne non seulement les propriétés de localisation ou de diffusion à temps très long, i.e. lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , mais aussi comment l'on converge vers ces états asymptotiques. En d'autres termes, cette équation permet de décrire la dynamique du système au voisinage du seuil passant du régime de diffusion anormale aux temps courts à une dynamique soit diffusive, soit localisée aux temps longs.

### A.1 Loi d'échelle pour la constante de diffusion $D(\omega)$

Suivant [130], nous montrons que la constante de diffusion  $D(\omega)$  telle que donnée par l'équation auto-cohérente (7.2), vérifie au voisinage du seuil de la transition d'Anderson une loi d'échelle :

$$D(\omega) \sim \omega^{1/3} G(\omega\xi^3), \quad (7.3)$$

où  $\xi$  est la longueur de corrélation dans le régime diffusif ou la longueur de localisation dans le régime localisé. La théorie auto-cohérente permet de donner la forme explicite de la fonction d'échelle  $G(x)$ .

### A.1.1 Fonction d'échelle

L'intégrale sur  $\Phi$  apparaissant dans l'équation auto-cohérente (en dimension  $d = 3$ ) :

$$\int \frac{d^3\Phi}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\Phi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{1/k} d\Phi \frac{\Phi^2}{-i\omega + D(\omega)\Phi^2}, \quad (7.4)$$

est restreinte à des valeurs de  $\Phi = |\Phi|$  inférieures à  $1/k$ , sans quoi elle n'est pas définie (le régime hydrodynamique correspond en effet à  $k\Phi \ll 1$  et  $\omega \ll 1$ ). Procédant au changement de variable  $\Phi \rightarrow y = \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}\Phi$  et notant  $\tilde{\ell}(\omega) = \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}\frac{1}{k}$ , on peut réécrire l'équation auto-cohérente sous la forme :

$$\frac{D(\omega)}{D} = 1 - \frac{1}{\pi^2 D k} \frac{1}{\tilde{\ell}(\omega)} \int_0^{\tilde{\ell}(\omega)} dy \frac{y^2}{1+y^2}. \quad (7.5)$$

Utilisant l'identité :

$$\frac{y^2}{1+y^2} = 1 - \frac{1}{1+y^2}, \quad (7.6)$$

et le fait que  $D = \frac{k^2}{4d} = \frac{k^2}{12}$  en dimension  $d = 3$  (voir annexe B), on obtient :

$$\boxed{\frac{D(\omega)}{D} = 1 - \frac{12}{\pi^2} \frac{1}{k^3} \left( 1 + \frac{1}{\tilde{\ell}(\omega)} \int_0^{\tilde{\ell}(\omega)} dy \frac{1}{1+y^2} \right)}. \quad (7.7)$$

Au voisinage de la transition  $|k - k_c|/k_c \ll 1$ , et pour des valeurs de fréquence  $\omega$  suffisamment faibles telles que  $\tilde{\ell}(\omega) \gg 1$  [ $\tilde{\ell}(\omega)$  diverge à la transition quand  $\omega \rightarrow 0$ ], l'équation (7.7) peut s'approximer suivant :

$$\frac{D(\omega)}{D} = 3 \left( \frac{k}{k_c} - 1 \right) + \left( \frac{k_c}{k} \right)^3 \frac{1}{\tilde{\ell}(\omega)} \frac{\pi}{2}. \quad (7.8)$$

Ici, nous avons remplacé la limite supérieure  $\tilde{\ell}(\omega)$  dans l'intégrale de l'équation (7.7) par l'infini (l'intégrale est définie), et avons fait l'approximation :

$$1 - \left( \frac{k}{k_c} \right)^{-3} \approx \frac{3}{k_c} (k - k_c). \quad (7.9)$$

Dans le second terme de droite, nous pouvons approximer  $k$  par  $k_c$  et en se rappelant que la constante de diffusion classique est reliée à  $k_c$  via  $k_c = \sqrt{12D}$  (pour  $k \approx k_c$ ), on peut écrire :

$$\frac{D(\omega)}{D} = 3 \left( \frac{k}{k_c} - 1 \right) + \pi\sqrt{3} \left( \frac{-i\omega}{D(\omega)/D} \right)^{1/2}. \quad (7.10)$$

On définit la fonction  $\tilde{G}$  comme suit :

$$\tilde{G}(\omega) = 3 \left( \frac{k}{k_c} - 1 \right) (-i\omega)^{-1/3} + \pi\sqrt{3} \left( \frac{-i\omega}{D(\omega)/D} \right)^{1/2} (-i\omega)^{-1/3}. \quad (7.11)$$

Le second terme de droite se réécrit en fonction de  $\tilde{G}$ -même :

$$\begin{aligned} \left( \frac{-i\omega}{D(\omega)/D} \right)^{1/2} (-i\omega)^{-1/3} &= \left[ \frac{D(\omega)}{D} (-i\omega)^{-1/3} \right]^{-1/2} \\ &= \left[ \tilde{G}(\omega) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Introduisons la fréquence caractéristique  $\omega_\xi$  telle que :

$$\omega_\xi = \left[ 3 \left( \frac{k}{k_c} - 1 \right) \right]^3. \quad (7.13)$$

Ceci permet de réécrire le premier terme de droite de l'équation (7.11) sous la forme :

$$3 \left( \frac{k}{k_c} - 1 \right) (-i\omega)^{-1/3} = \pm \left( \frac{-i\omega}{\omega_\xi} \right)^{-1/3}, \quad (7.14)$$

où le signe + correspond au régime diffusif  $k > k_c$  et le signe - au régime localisé  $k < k_c$ .

On a :

$$\boxed{\omega_\xi \sim \xi^{-3}}. \quad (7.15)$$

Dans le régime localisé,  $\xi \sim \ell$ , et la fréquence caractéristique  $\omega_\xi$  correspond au temps de localisation  $t_\ell$ . L'équation (7.15) est le pendant de la loi  $t_\ell \sim \ell^3$  qui donne la dépendance du temps de localisation en fonction de la longueur de localisation en dimension trois (voir chapitre 5). Ainsi, la fonction  $G(-i\omega/\omega_\xi) = \tilde{G}(\omega)$  vérifie d'après ce qu'on a dit :

$$\boxed{G(z) = \pm z^{-1/3} + \pi\sqrt{3}G(z)^{-1/2}}, \quad (7.16)$$

et est telle que :

$$\boxed{\frac{D(\omega)}{D} = (-i\omega)^{1/3} G(-i\omega/\omega_\xi)}. \quad (7.17)$$

L'équation précédente n'est autre que la loi d'échelle, Eq. (7.3), pour la constante de diffusion  $D(\omega)$ . Ainsi, nous voyons que la théorie auto-cohérente donne la forme explicite de la fonction d'échelle  $G$ . L'équation (7.16) pour  $G$  peut être résolue de façon exacte. Nous en donnons ici les formes asymptotiques.

### A.1.2 Comportement asymptotique de la fonction d'échelle dans le régime diffusif

Considérons le voisinage de la transition du côté diffusif  $0 < (k - k_c)/k_c \ll 1$  et plaçons-nous dans la limite des temps très long,  $\omega \ll \omega_\xi$ . Etudier le comportement de la fonction d'échelle  $G$  dans ce régime revient à chercher la solution approchée de l'équation :

$$y = x^{-1/3} + y^{-1/2}, \quad (7.18)$$

dans la limite où  $x \rightarrow 0$ . Or, le fait que  $x^{-1/3} = y - y^{-1/2} \rightarrow +\infty$  n'est possible que si  $y \rightarrow +\infty$  et donc  $y^{-1/2} \rightarrow 0$ . Dans ce cas, on a  $y \sim x^{-1/3}$ . Conclusion :

$$\boxed{G(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{-1/3}, \text{ dans le régime diffusif}}. \quad (7.19)$$

### A.1.3 Comportement asymptotique de la fonction d'échelle dans le régime localisé

Au voisinage du seuil, du côté localisé  $0 < (k_c - k)/k_c \ll 1$ , et à temps très long  $\omega \ll \omega_\xi$  (i.e. au-delà du temps de localisation), la fonction d'échelle se comporte comme la solution de :

$$y = -x^{-1/3} + y^{-1/2}, \quad (7.20)$$

dans la limite où  $x \rightarrow 0$ . Le signe  $-$  devant  $x^{-1/3}$  implique maintenant que c'est  $y^{-1/2}$  qui diverge et  $y$  qui tend vers zero, et ainsi :  $y \sim x^{2/3}$ . Conclusion, la loi d'échelle a le comportement asymptotique :

$$\boxed{G(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{2/3}, \text{ dans le régime localisé}}. \quad (7.21)$$

#### A.1.4 Comportement de $D(\omega)$ à la transition

Plaçons nous au le régime critique où  $\omega_\xi \ll \omega$ . Ce régime est atteint en particulier à la transition  $k = k_c$  où  $\omega_\xi = 0$ . Le comportement de  $G$  dans ce régime est décrit par :

$$y = x^{-1/3} + y^{-1/2}, \quad (7.22)$$

lorsque  $x \rightarrow \infty$ . La solution est

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = \text{cste}. \quad (7.23)$$

Dans ce cas, nous voyons que  $D(\omega)$  se comporte comme :

$$\boxed{D(\omega) \sim (-i\omega)^{1/3}}. \quad (7.24)$$

C'est le résultat le plus important de cette section. Il constitue le point de départ de notre analyse de la fonction d'onde critique telle que déduite de la théorie auto-cohérente. Il faut noter que le régime critique est considéré ici au sens large  $\omega_\xi \ll \omega$  et non pas seulement au sens où  $k = k_c$ . Le comportement de  $D(\omega) \sim (-i\omega)^{1/3}$  qui équivaut, comme on le verra par la suite, à une diffusion anormale  $\langle l^2 \rangle \sim t^{2/3}$ , est valide non seulement au seuil de la transition  $k = k_c$ , mais aussi pour les temps tels que  $t \ll t_\ell$  du côté localisé (et de même du côté diffusif avec un temps  $t_\xi$  correspondant à  $\omega_\xi$ ).

Il faut noter également la parfaite analogie de la loi d'échelle sur  $D(\omega)$ , Eq. (7.3), avec celle :

$$\langle l^2 \rangle(t) \sim t^{2/3} F\left(\frac{\xi}{t^{1/3}}\right), \quad (7.25)$$

déduite de la théorie d'échelle à un paramètre (voir chapitre 5). En particulier, les comportements asymptotiques de la fonction d'échelle  $G$ , Eq. (7.19) et (7.21), correspondent en tous points à ceux de la fonction d'échelle  $F$ . Le grand intérêt de la théorie auto-cohérente est qu'elle permet non-seulement de retrouver les prédictions de la théorie d'échelle à un paramètre, mais aussi d'obtenir la forme entière de la fonction d'onde ainsi que sa dynamique [137], comme nous le montrons dans la suite pour le Kicked Rotor quasi-périodique au seuil de la transition.

## A.2 Forme et dynamique de la fonction d'onde critique

On a vu à la section A.2 du chapitre 5 que la dynamique du Kicked Rotor quasi-périodique est identique à celle d'un Kicked Rotor 3D *anisotrope* :

$$\boxed{H_3 = \frac{p_1^2}{2} + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + K \cos \theta_1 [1 + \varepsilon \cos \theta_2 \cos \theta_3] \sum_n \delta(t - n)}, \quad (7.26)$$

avec source plane :

$$\psi_3(\boldsymbol{\theta}, t = 0) = \psi_{qp}(\theta_1, t = 0)\delta(\theta_2 - \varphi_2)\delta(\theta_3 - \varphi_3) , \quad (7.27)$$

où  $\psi_{qp}(\theta_1, t = 0)$  est une condition initiale arbitraire du Kicked Rotor quasi-périodique.

La dépendance linéaire de l'Hamiltonien  $H_3$  (7.26) suivant  $p_2$  et  $p_3$ , qui n'est pas usuelle, n'empêche pas la dynamique d'être similairement diffusive ou localisée suivant les trois coordonnées. En revanche, l'anisotropie, gouvernée par le paramètre  $\varepsilon$ , affecte les propriétés de transport suivant les directions transverses  $p_2$  et  $p_3$ . Comment cela se traduit-il dans la théorie auto-cohérente précédemment introduite ? On peut montrer [44] que l'effet d'anisotropie peut être complètement absorbé dans des tenseurs de diffusion [classique  $\tilde{D}$  et quantique  $\tilde{D}(\omega)$ ] anisotropes. Ceci implique entre autres une dépendance du désordre critique  $k_c$  suivant  $\varepsilon$  (voir section E du chapitre 5). Mais cela ne brise pas l'universalité des lois d'échelle au régime critique (voir chapitre 6). En particulier la loi  $\tilde{D}(\omega) \sim (-i\omega)^{1/3}$  reste valable dans le cas du Kicked Rotor quasi-périodique au seuil de la transition (au sens où les composantes du tenseur de diffusion varient toutes en  $(-i\omega)^{1/3}$  à la transition).

Partant de la dépendance de  $\tilde{D}(\omega)$  suivant  $\omega$  au régime critique :

$$\boxed{\tilde{D}(\omega) = \tilde{\rho}(-i\omega)^{1/3} = \tilde{c}\omega^{-1/3}} , \quad (7.28)$$

où  $\tilde{\rho}$  est un tenseur constant indéterminé et  $\tilde{c} = \tilde{\rho}e^{-i\pi/6}$ , nous souhaitons obtenir la forme et la dynamique de la distribution en impulsion  $p$  du Kicked Rotor quasi-périodique  $|\psi_{qp}(p, t)|^2$  ayant pour condition initiale  $\psi_{qp}(p, t = 0) = \delta(p = 0)$ . Ceci revient à calculer la probabilité  $P(l, t) = |\psi_{qp}(p = lk, t)|^2$  telle que :

$$P(l, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{d^3\boldsymbol{\varphi}}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{l}} \frac{f(\boldsymbol{\varphi})}{-i\omega + \sum_{j=1}^3 \tilde{D}_{j,j}(\omega)\varphi_j^2} , \quad (7.29)$$

avec  $f(\boldsymbol{\varphi})$  la fonction source associée au problème considéré, qui s'écrit ici sous la forme :

$$f(\boldsymbol{\varphi}) = \delta(\varphi_2 = 0)\delta(\varphi_3 = 0) . \quad (7.30)$$

Dans l'expression (7.29), on a implicitement considéré que les directions "1", "2" et "3" sont les directions propres du tenseur de diffusion. La fonction source correspond à la condition initiale (7.27) pour le Kicked "Rotor" 3D anisotrope (7.26) :

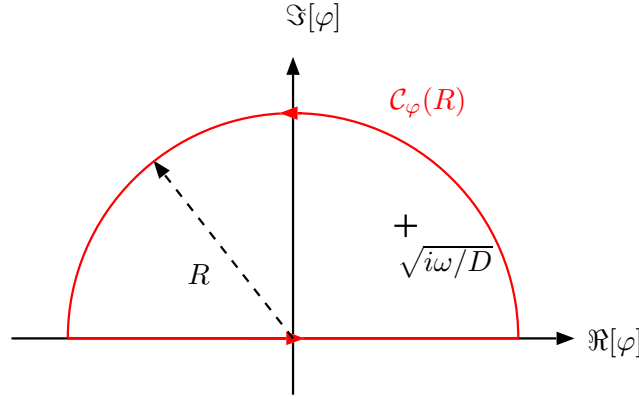
$$\psi_3(\boldsymbol{\theta}, t = 0) = \delta(\theta_2 = 0)\delta(\theta_3 = 0) . \quad (7.31)$$

En intégrant sur les variables  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ , on aboutit facilement à :

$$\boxed{P(l, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi l} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\varphi^2}} , \quad (7.32)$$

où l'on a noté  $D(\omega) = \tilde{D}_{1,1}(\omega)$ . Également, dans la suite, nous noterons  $\rho = \tilde{\rho}_{1,1}$  et  $c = \tilde{c}_{1,1}$ .

Nous considérons ici le cas  $l > 0$  sans que la discussion qui suit en devienne moins générale. En effet  $P(l, t)$  est paire suivant  $l$  :  $P(-l, t) = P(l, t)$ . L'intégrale sur  $\varphi$  peut être menée



**Fig. 7.1:** Contour d'intégration  $\mathcal{C}_\varphi(R)$  (en rouge) pour le calcul de l'intégrale Eq. (7.32).

en suivant le contour  $\mathcal{C}_\varphi(R)$  représenté en figure 7.1. Le théorème des résidus donne :

$$\begin{aligned} P(l, t) &= \frac{i}{4\pi} \int d\omega \frac{\exp \left[ -i\omega t + il\sqrt{i\omega/D(\omega)} \right]}{\sqrt{iD(\omega)\omega}} \\ &= \frac{i}{4\pi} \int d\omega \frac{\exp \left[ -i\omega t + il\sqrt{i\omega^{2/3}/c} \right]}{\sqrt{i\omega^{4/3}c}}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

La fonction à intégrer a en  $\omega = 0$  un pôle et un point de branchement. Le contour d'intégration  $\mathcal{C}_\omega(\epsilon)$  est donc pris tel que représenté en figure 7.2.  $\mathcal{C}_\omega(\epsilon)$  contourne le point  $\omega = 0$  via un demi-cercle de rayon  $\epsilon \rightarrow 0$  dans le demi-plan des parties imaginaires positives. La ligne de coupure partant de  $\omega = 0$  est prise dans le demi-plan des parties imaginaires négatives.

L'intégrale (7.33) peut se calculer de façon analytique en procédant de la façon suivante. On effectue le changement de variable suivant  $\omega \rightarrow \Omega = \omega^{1/3}/\sqrt{ic}$ . On a alors :

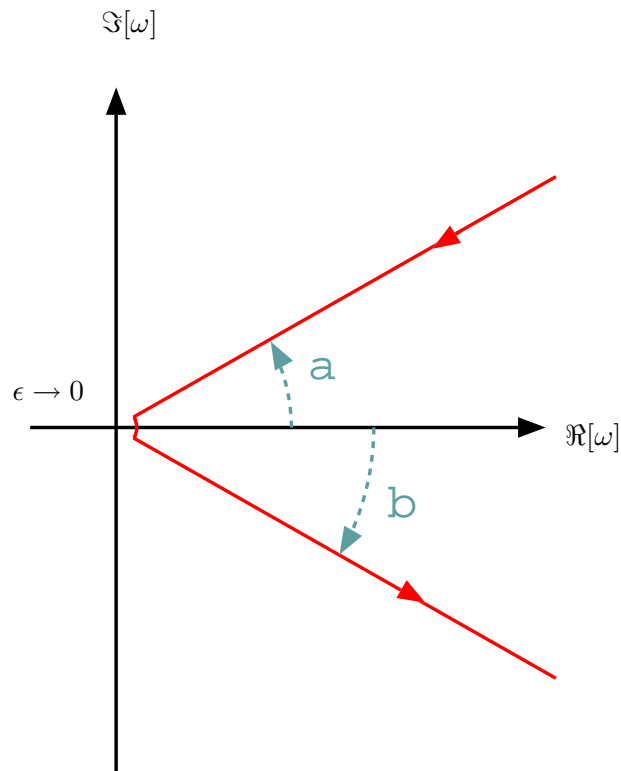
$$\begin{aligned} P(l, t) &= \frac{3i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_\Omega} d\Omega \exp \left[ -\Omega l + \Omega^3 t \sqrt{ic}^{3/2} \right] \\ &= \frac{3i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_\Omega} d\Omega \exp \left[ -\Omega l + \Omega^3 t \rho^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (7.34)$$

où le contour d'intégration  $\mathcal{C}_\Omega(\epsilon)$  correspond au contour original pour  $\omega$ ,  $\mathcal{C}_\omega(\epsilon)$ , et est représenté en figure 7.3.

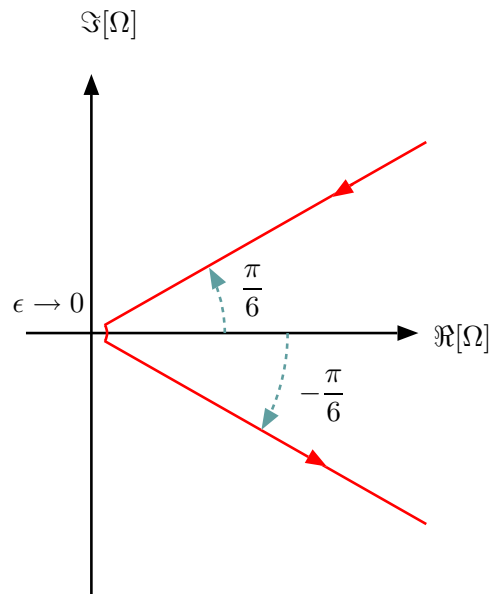
Considérons l'intégrale Eq. (7.34) sur le contour fermé  $\mathcal{C}_f(R)$  représenté en figure 7.4 et qui est constitué de quatre parties,  $\mathcal{C}_<(R)$ ,  $\mathcal{C}_+(R)$ ,  $\mathcal{C}_-(R)$  et  $\mathcal{C}_|(R)$ . Les contours  $\mathcal{C}_+(R)$  et  $\mathcal{C}_-(R)$  sont des portions de cercle de rayon  $R$ .

Les intégrales de la fonction analytique  $\exp \left[ -\Omega l + \Omega^3 t \rho^{3/2} \right]$  sur ces contours  $\mathcal{C}_+(R)$  et  $\mathcal{C}_-(R)$  tendent vers 0 lorsque  $R \rightarrow \infty$ . Pour voir cela dans le cas du contour  $\mathcal{C}_+(R)$ , par exemple, on effectue le changement de variable  $\Omega \rightarrow \alpha$  avec  $\alpha$  telle que  $\Omega = Re^{i\alpha}$ . L'intégrale Eq. (7.34) sur  $\mathcal{C}_+(R)$  se réécrit :

$$\frac{3i}{4\pi} \int_{\pi/2}^{\pi/6} d\alpha iRe^{i\alpha} \exp \left[ -Re^{i\alpha} l + R^3 e^{i3\alpha} t \rho^{3/2} \right]. \quad (7.35)$$

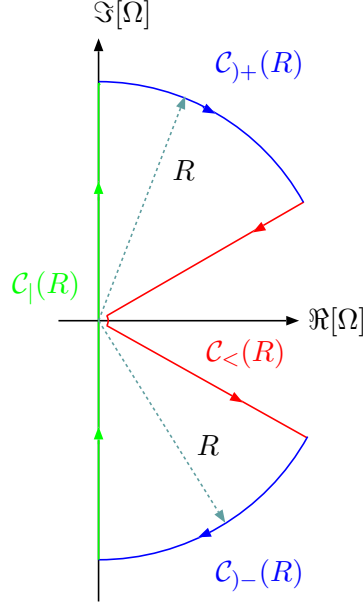


**Fig. 7.2:** Le chemin d'intégration sur  $\omega$ ,  $\mathcal{C}_\omega(\epsilon)$ , pour l'équation (7.33) (représenté en rouge) contourne le point  $\omega = 0$  via un demi-cercle de rayon  $\epsilon \rightarrow 0$  dans le demi-plan des parties imaginaires positives. La ligne de coupure (représentée en bleu) partant de  $\omega = 0$  est prise dans le demi-plan des parties imaginaires négatives.



**Fig. 7.3:** Le chemin d'intégration sur  $\Omega$ ,  $\mathcal{C}_\Omega(\epsilon)$ , pour l'équation (7.34) (représenté en rouge) correspondant au contour  $\mathcal{C}_\omega(\epsilon)$  via  $\Omega = \omega^{1/3}/\sqrt{ic}$ .





**Fig. 7.4:** Le contour fermé  $C_f(R)$ .

Elle est majorée par :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3i}{4\pi} \int_{\pi/2}^{\pi/6} d\alpha \, i R e^{i\alpha} \exp \left[ -R e^{i\alpha} l + R^3 e^{i3\alpha} t \rho^{3/2} \right] \right| \\ & \leq R \int_{\pi/2}^{\pi/6} d\alpha \exp \left[ -R l \cos \alpha + R^3 t \rho^{3/2} \cos(3\alpha) \right] . \end{aligned} \quad (7.36)$$

Et l'on voit facilement que la fonction majorante tend vers 0 lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

Comme  $C_f$  ne contourne pas de pôle de la fonction à intégrer  $\exp \left[ -\Omega l + \Omega^3 t \rho^{3/2} \right]$ , l'intégrale Eq. (7.34) sur ce contour fermé est nulle. Après avoir pris la limite  $R \rightarrow \infty$ , on obtient que l'intégrale sur  $C_l(R \rightarrow \infty)$  est l'opposé de l'intégrale sur  $C_<(R \rightarrow \infty)$ , qui n'est autre que  $P(l, t)$ . Autrement dit :

$$P(l, t) = - \left\{ \frac{3i}{4\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\Omega \exp \left[ -\Omega l + \Omega^3 t \rho^{3/2} \right] \right\} . \quad (7.37)$$

On peut maintenant procéder au changement de variable  $\Omega \rightarrow \varpi = -i\Omega$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} P(l, t) &= \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varpi \exp \left( -i\varpi l - i\varpi^3 t \rho^{3/2} \right) \\ &= \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\varpi \cos \left( \varpi l + \varpi^3 t \rho^{3/2} \right) . \end{aligned} \quad (7.38)$$

Cette dernière équation est l'expression intégrale de la fonction d'Airy Ai [87].

Conclusion, la fonction d'onde critique telle que prédite par la théorie auto-cohérente dans le cas du Kicked Rotor quasi-périodique vérifie :

$$\boxed{P(l, t) = \frac{3}{2} \left( 3\rho^{3/2} t \right)^{-1/3} \text{Ai} \left[ \left( 3\rho^{3/2} t \right)^{-1/3} |l| \right]} . \quad (7.39)$$

On rappelle que  $P(l, t) = |\psi_{qp}(p = l\bar{k}, t)|^2$ , que l'on a considéré une fonction d'onde initiale  $\psi_{qp}(p, t = 0) = \delta(p = 0)$  et que l'on a pris  $D(\omega)$  sous la forme  $D(\omega) = \rho(-i\omega)^{1/3}$ , comme cela est indiqué par la théorie auto-cohérente, où  $\rho$  n'est pas connu a priori (voir suite). On vérifie facilement que la probabilité  $P$ , Eq. (7.39), est normalisée.

### A.3 Confrontation des prédictions de la théorie auto-cohérente pour la dynamique critique avec les résultats numériques

La fonction d'onde critique telle que prédite par la théorie auto-cohérente, Eq. (7.39), a une dynamique en diffusion anormale :

$$\langle l^2 \rangle = \frac{3\rho}{\Gamma(2/3)} t^{2/3}. \quad (7.40)$$

Cette dynamique critique est également prédite par la théorie d'échelle à un paramètre, comme nous l'avons vérifié, tant numériquement qu'expérimentalement (voir section V B de notre article [120] reproduit en section E du chapitre 5), et s'exprime sous la forme  $\langle l^2 \rangle = \Lambda_c t^{2/3}$ . Ainsi, le paramètre  $\rho$  est relié à  $\Lambda_c$  via :

$$\rho = \frac{\Gamma(2/3)}{3} \Lambda_c. \quad (7.41)$$

De l'expression Eq. (7.39) pour la fonction d'onde critique, on peut déduire également le comportement de la probabilité de retour à l'origine  $\Pi_0(t) = |\Psi_{qp}(p = 0, t)|^2 = P(0, t)$  :

$$\Pi_0(t) \sim t^{-1/3}. \quad (7.42)$$

En outre, et c'est le point le plus important, la fonction d'onde critique devrait, d'après l'Eq. (7.39), vérifier la loi d'échelle suivante :

$$t^{1/3} P(l, t) = \mathcal{G}(lt^{-1/3}), \quad (7.43)$$

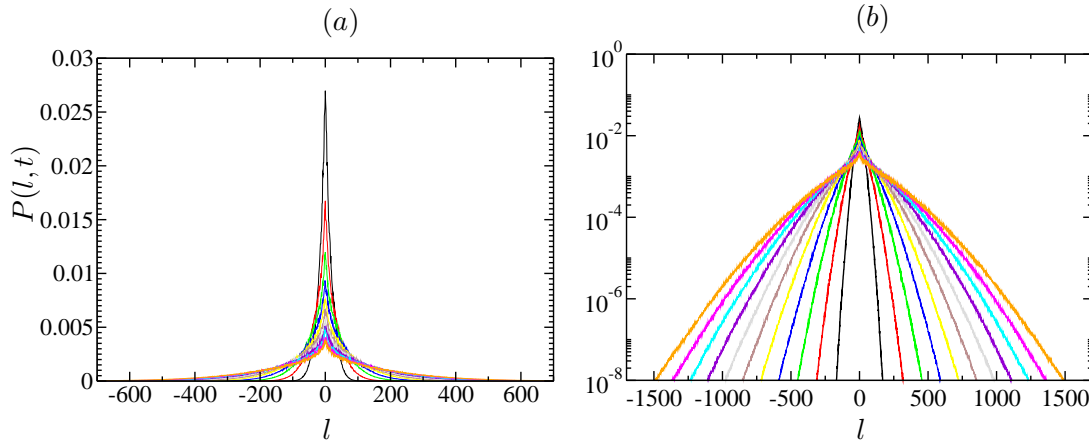
où la fonction d'échelle  $\mathcal{G}$  s'écrit :

$$\mathcal{G}(x) = \frac{3}{2} \left(3\rho^{3/2}\right)^{-1/3} \text{Ai} \left[ \left(3\rho^{3/2}\right)^{-1/3} |x| \right]. \quad (7.44)$$

Dans la suite, nous étudions si les données numériques pour le Kicked Rotor quasi-périodique au régime critique vérifient chacune de ces prédictions.

Nous présentons ici les résultats de simulations numériques pour le Kicked Rotor quasi-périodique avec les paramètres  $\bar{k} = 2.85$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$  au régime critique  $(K, \varepsilon) = (6.36, 0.43) \approx (K_c, \varepsilon_c)$ . Nous avons bien sûr vérifié que les propriétés auxquelles on s'intéresse (i.e. les lois d'échelle) étaient insensibles au choix des paramètres  $\bar{k}$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$ . La dynamique critique est étudiée pour des temps variant dans un intervalle à l'ambitus très large  $t \in [10^3, 10^6]$ .

Vérifions d'abord si les données numériques représentées en figure 7.5 vérifient la loi d'échelle (7.43) prédite par la théorie auto-cohérente. Pour ce faire, nous étudions le comportement de  $t^{1/3} P(l, t)$  en fonction de la quantité renormalisée  $lt^{-1/3}$ . La figure 7.6 présente le résultat de cette étude. Le fait que les données pour différents temps  $t$  entre



**Fig. 7.5:** Évolution temporelle de la fonction d'onde critique  $P(l, t)$  du Kicked Rotor quasi-périodique. Les fonctions représentées correspondent à différents temps  $t$  entre  $t = 10^3$  (en noir) et  $t = 10^6$  (en orange). Les paramètres ont été pris comme suit :  $k = 2.85$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$  et l'on a considéré le régime critique  $(K, \varepsilon) = (6.36, 0.43) \approx (K_c, \varepsilon_c)$  (ensemble de paramètres  $\mathcal{A}$  considéré dans notre article long [120] reproduit en section E du chapitre 5).

$t = 10^3$  et  $t = 10^6$  se superposent est un premier argument en faveur de la loi d'échelle (7.43).

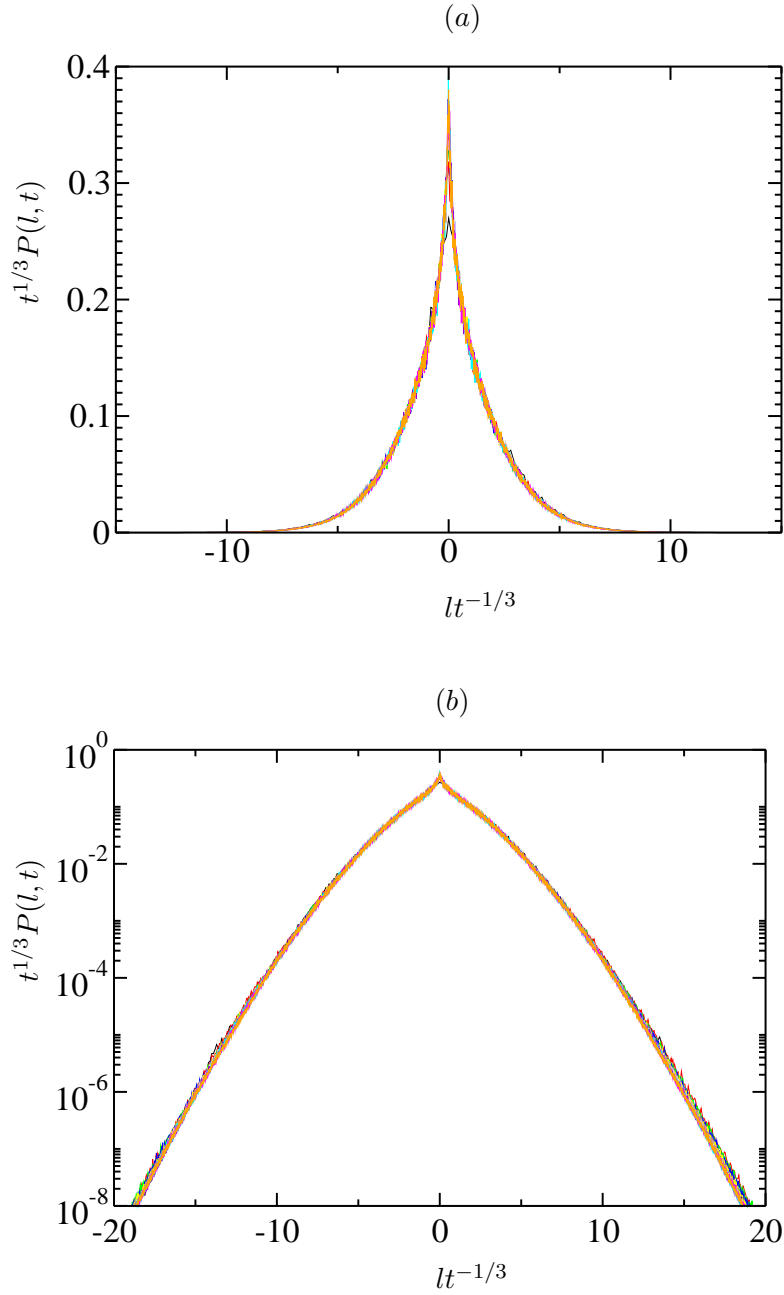
Est-ce que la fonction d'échelle, clairement visible en figure 7.6, correspond à celle prédite par la théorie auto-cohérente,  $\mathcal{G}$ , Eq. (7.44) ? Pour examiner cela, essayons d'ajuster la prédiction  $\mathcal{G}$  à la fonction  $t^{1/3}P(l, t)$  vs.  $lt^{-1/3}$  obtenue numériquement. L'unique paramètre ajustable caractérisant  $\mathcal{G}$  est  $\rho$ . La valeur optimale de  $\rho$  est celle qui minimise l'écart entre la fonction test  $\ln \mathcal{G}$  et les données  $\ln[t^{1/3}P(l, t)]$ . Le fait que l'on considère le logarithme de la fonction d'échelle et non la fonction d'échelle elle-même est lié à ce que nous devons donner du poids aux données numériques pour les valeurs grandes de  $l$ . Le domaine de validité de la théorie auto-cohérente est en effet dans la limite diffusive  $k\varphi \ll 1$  et  $\omega \ll 1$ , qui correspond aux temps longs et aux grands  $l$ .

La figure 7.7 représente le résultat d'une telle tentative d'ajustement. L'accord entre le modèle théorique  $\mathcal{G}$  (7.44) et les données numériques est très bon pour les grandes valeurs de  $lt^{-1/3}$ . Néanmoins, au voisinage de  $lt^{-1/3} \approx 0$ , les données numériques diffèrent notablement du modèle (7.44), comme vu dans la figure 7.7 (a). Dans ce régime, on observe un "petit pic" dans l'amplitude croît en fonction du temps (à temps courts, ce petit pic est négligeable -voir la comparaison avec les données expérimentales). Ceci est particulièrement manifeste lorsque l'on considère le comportement de  $P(l = 0, t) = \Pi_0(t)$  : au contraire de ce qui est prédit par la théorie auto-cohérente,  $\Pi_0(t)$  ne décroît pas suivant  $\Pi_0(t) \sim t^{-1/3}$  mais plutôt suivant :

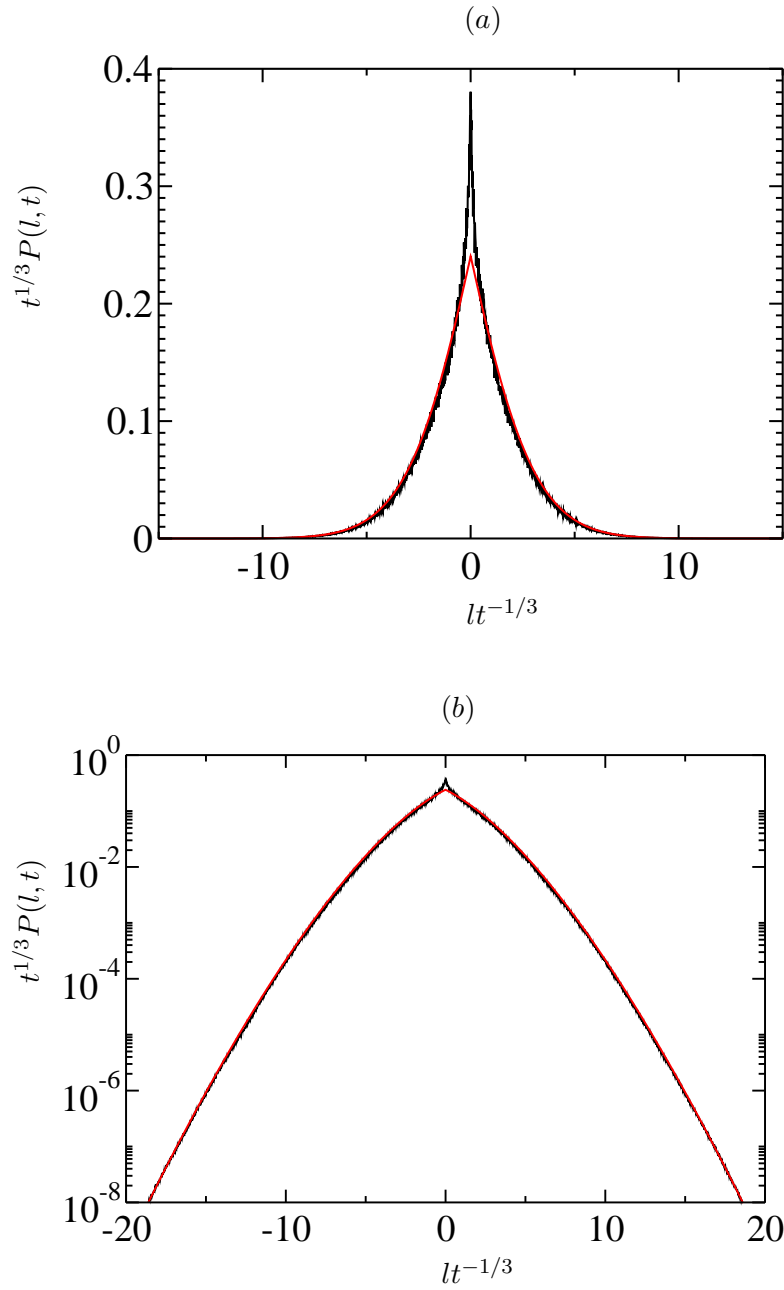
$$\Pi_0(t) \sim t^{-\alpha}, \quad (7.45)$$

avec  $\alpha \approx 0.29$  (voir figure 7.9).

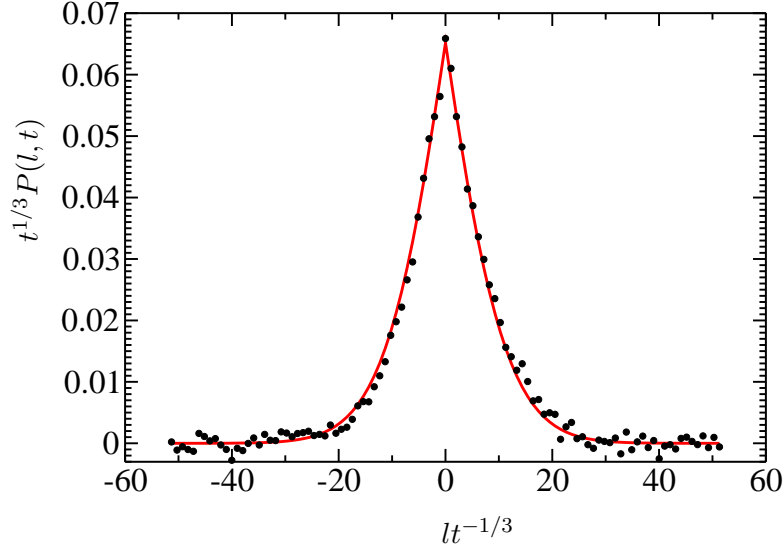
Les raisons de cette divergence entre les prédictions de la théorie d'échelle à un paramètre et de la théorie auto-cohérente et les observations pour la fonction d'onde critique à temps longs font l'objet de la section B suivante. Auparavant, nous effectuons une rapide



**Fig. 7.6:** Comportement d'échelle au régime critique de la fonction critique du Kicked Rotor quasi-périodique :  $t^{1/3}P(l,t)$  est représenté en fonction de  $lt^{-1/3}$ . Les fonctions représentées correspondent à celles de la figure 7.5, i.e. sont associées à différents temps  $t$  entre  $t = 10^3$  (en noir) et  $t = 10^6$  (en orange). Le fait que toutes se superposent est un premier argument en faveur de la loi d'échelle (7.43) prédite par la théorie auto-cohérente du Kicked Rotor quasi-périodique. Les paramètres ont été pris comme suit :  $k = 2.85$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$  et l'on a considéré le régime critique  $(K, \varepsilon) = (6.36, 0.43) \approx (K_c, \varepsilon_c)$  (ensemble de paramètres  $\mathcal{A}$  considéré dans notre article long [120] reproduit en section E du chapitre 5).



**Fig. 7.7:** Ajustement du modèle théorique  $\mathcal{G}$  (7.44) (courbe rouge) aux données numériques pour le Kicked Rotor au régime critique et à temps long  $t = 10^6$  (courbe noire). Le seul paramètre ajustable dans le modèle (7.44) est  $\rho$ . La valeur optimale de  $\rho$ , qui minimise l'écart entre la fonction test  $\ln \mathcal{G}$  (7.44) et les données  $\ln[t^{1/3}P(l, t)]$ , est trouvée compatible avec la détermination directe de  $\ln \Lambda_c$  :  $\ln(3\rho/\Gamma(2/3)) \approx 1.62 \approx \ln \Lambda_c = 1.60 \pm 0.04$  (voir table II de notre article [120] reproduit en section E du chapitre 5). L'accord entre le modèle et les données est très bon pour les grandes valeurs de  $lt^{-1/3}$ . En revanche, au voisinage de  $lt^{-1/3} \approx 0$ , les données diffèrent notablement de la fonction d'Airy. Cette divergence constitue une déviation vis-à-vis de la théorie d'échelle à un paramètre et de la théorie auto-cohérente. Les paramètres ont été pris comme suit :  $k = 2.85$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$  et l'on a considéré le régime critique  $(K, \varepsilon) = (6.36, 0.43) \approx (K_c, \varepsilon_c)$  (ensemble de paramètres  $\mathcal{A}$  de [120]).



**Fig. 7.8:** Ajustement du modèle théorique  $\mathcal{G}$  (7.44) (courbe rouge) aux *données expérimentales* pour le Kicked Rotor quasi-périodique au régime critique à  $t = 150$  kicks (points noire). L'accord entre le modèle et les données est très bon. Aucune déviation statistique notable n'est observée vis-à-vis de la théorie auto-cohérente : le "petit pic" n'a pas eu le temps de se former (voir texte). Les paramètres expérimentaux sont les suivants :  $\hbar = 2.89$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{7}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{17}$  et le régime critique  $(K, \varepsilon) = (6, 0.38) \approx (K_c, \varepsilon_c)$  a été considéré.

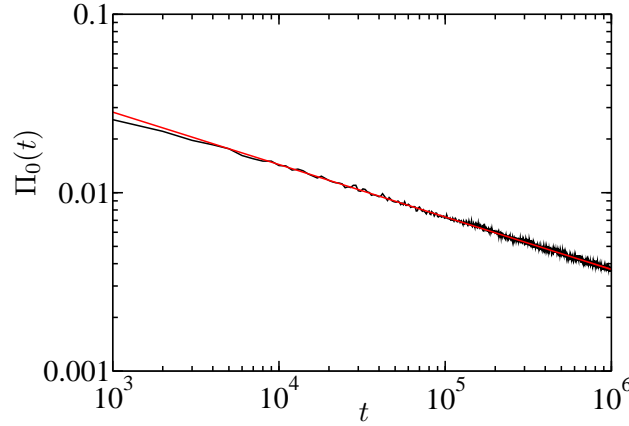
confrontation de nos prédictions avec les données expérimentales.

#### A.4 Comparaison de la prédiction de la théorie auto-cohérente pour la fonction d'onde critique avec les données expérimentales

Dans cette sous-section, nous présentons des résultats expérimentaux récemment obtenus par Hans Lignier de l'équipe de J.-C. Garreau et P. Szriftgiser à Lille, dont l'analyse n'est pas complètement achevée. Ils devraient, sous peu, faire l'objet d'un article dans lequel figurera notre analyse théorique.

La transition d'Anderson est observée expérimentalement avec le Kicked Rotor quasi-périodique également pour les paramètres :  $\hbar = 2.89$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{7}$ ,  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{17}$  et  $(K, \varepsilon)$  variant linéairement entre  $(4, 0.1)$  et  $(9, 0.8)$ . Le seuil critique est alors  $(K_c, \varepsilon_c) \approx (6, 0.38)$  et l'exposant critique de la longueur de localisation est  $\nu = 1.5 \pm 0.3$ .

La distribution en impulsion expérimentale, mesurée à  $t = 160$  kicks, ne présente pas de déviation significative par rapport à notre forme analytique de la fonction d'onde critique (voir figure 7.8). À temps courts, les déviations à la théorie auto-cohérente sont négligeables (le petit pic n'a pas eu le temps de se former).



**Fig. 7.9:** Décroissance de la probabilité de retour à l'origine,  $\Pi_0(t) = P(l = 0, t)$ , en fonction du temps pour le Kicked Rotor quasi-périodique au régime critique (en noir). Contrairement à la prédiction de la théorie auto-cohérente,  $\Pi_0(t)$  ne décroît pas suivant  $\Pi_0(t) \sim t^{-1/3}$  mais plutôt suivant  $\Pi_0(t) \sim t^{-\alpha}$  avec  $\alpha \approx 0.29$ . La droite représentée en rouge est obtenue par régression linéaire de  $\ln \Pi_0(t)$  en fonction de  $\ln(t)$ . La pente obtenue est  $\alpha \approx 0.29$ . Les paramètres ont été pris comme suit :  $k = 2.85$ ,  $\omega_2 = 2\pi\sqrt{5}$  et  $\omega_3 = 2\pi\sqrt{13}$  et l'on a considéré le régime critique  $(K, \varepsilon) = (6.36, 0.43) \approx (K_c, \varepsilon_c)$ .

## B Déviations à la théorie auto-cohérente : multi-fractalité

La dynamique de la fonction d'onde critique est, en bonne approximation, décrite par la théorie auto-cohérente pour le Kicked Rotor quasi-périodique. La loi d'échelle prédite pour  $t^{1/3}P(l, t)$ , Eq. (7.43) et (7.44), est vérifiée par les données numériques dans la limite des grands  $lt^{-1/3}$ . Une nette déviation à la loi d'échelle est néanmoins observée dans le régime où  $lt^{-1/3} \approx 0$ . En particulier, la probabilité de retour à l'origine  $\Pi_0(t)$  ne se comporte pas comme prévu par la théorie auto-cohérente, i.e. en  $\Pi_0(t) \sim t^{-1/3}$ , mais suit plutôt la loi  $\Pi_0(t) \sim t^{-d_s}$  avec  $d_s \approx 0.29$ .

Et pourtant, la loi de décroissance prédite théoriquement  $\Pi_0(t) \sim t^{-1/3}$  est bien celle à laquelle on s'attend par un argument naïf de normalisation. Suivant cet argument, la probabilité de retour à l'origine est inversement proportionnelle au volume de la région “explorée” par le Kicked Rotor quasi-périodique pendant  $t$ , soit :

$$\Pi_0(t) \propto [\langle l^2 \rangle(t)]^{-1/2} \sim t^{-1/3}, \quad (7.46)$$

puisque le Kicked Rotor quasi-périodique est un système uni-dimensionnel. Dans le cas d'un système désordonné 3D usuel, ce même type d'argument conduirait à une décroissance :

$$P(\mathbf{r} = \mathbf{0}, t) \propto [\langle \mathbf{r}^2 \rangle(t)]^{-3/2} \sim t^{-1}. \quad (7.47)$$

Ce n'est pas non plus ce qui est observé ; la probabilité de retour à l'origine décroît moins vite :  $P(\mathbf{r} = \mathbf{0}, t) \sim t^{-0.6}$  [42]. Quelle est l'origine de ce comportement singulier ?

Pour en avoir une idée, considérons le problème de transport dénommé “la fourmi dans le labyrinthe” [138, 139]. La fourmi dans le labyrinthe consiste en une “fourmi” diffusant dans un amas percolant. Le régime critique de la transition d'Anderson est semblable à ce problème de transport lorsque le système percolant est au seuil de percolation. Dans ce

cas, la probabilité que la fourmi parcoure la distance  $r$  en  $t$  pas,  $P_f(\mathbf{r}, t)$ , vérifie une loi d'échelle de la forme [139] :

$$P_f(\mathbf{r}, t) = t^{-d_s} \mathcal{G}_f(r^{d_w}/t) . \quad (7.48)$$

L'argument  $r^{d_w}/t$  est tel que le moment  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$  se comporte comme  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle \sim t^{2/d_w}$  (dans le cas de la transition d'Anderson, nous avons  $d_w = d$  où  $d$  est la dimension de l'espace).

Le préfacteur  $t^{-d_s}$ , qui est relié à la probabilité de retour à l'origine  $P_f(\mathbf{r} = \mathbf{0}, t)$ , peut être déterminé par normalisation. La marche de la fourmi est restreinte à l'amas infini qui est un objet de dimension fractale  $\mathcal{D}$ , i.e. qui est tel que sa masse comprise dans une région de taille linéaire  $R$  varie comme  $R^{\mathcal{D}}$  (la dimension fractale est inférieure à la dimension de l'espace :  $\mathcal{D} < d$ ). Ainsi, le volume (i.e. la masse) exploré par la fourmi en un temps  $t$  est  $[\langle \mathbf{r}^2 \rangle(t)]^{\mathcal{D}/2}$  et non  $[\langle \mathbf{r}^2 \rangle(t)]^{d/2}$  ; ce qui conduit à la décroissance pour la probabilité de retour à l'origine :

$$P_f(\mathbf{r} = \mathbf{0}, t) = t^{-\mathcal{D}/d_w} , \quad (7.49)$$

i.e.  $d_s = \mathcal{D}/d_w$ .

Dans le cas d'un système désordonné en dimension  $d$  au seuil de la transition d'Anderson,  $d_w = d$ . Et l'on observe bien une décroissance de la probabilité de retour à l'origine  $P(\mathbf{r} = \mathbf{0}, t) \sim t^{-d_s}$  avec  $d_s < 1$ . L'analogie avec la fourmi dans le labyrinthe suggère donc l'existence d'un espace dans lequel la fonction d'onde se propage effectivement, espace à tout le moins fractal. L'objet de cette dernière section est de montrer quel est cet espace (en fait il existe deux espaces intimement reliés) et quelles sont ses caractéristiques. Nous verrons qu'il est en fait *multi-fractal* et que la dynamique critique du Kicked Rotor quasi-périodique est directement reliée à ce caractère multi-fractal [140,141]. Nous vérifierons que les observations pour la fonction d'onde critique du Kicked Rotor quasi-périodique sont pleinement compatibles avec cette description théorique en termes de multi-fractalité [142].

## B.1 Probabilité de retour à l'origine

*La discussion suivante est en partie tirée de l'article [140]. Nous considérons le cas d'un système désordonné en dimension  $d$ . Nous étudions l'évolution temporelle d'un tel système ayant pour condition initiale l'état  $|\psi(t=0)\rangle = |\psi\rangle$ .*

Qu'est-ce qui détermine la décroissance de la probabilité de retour à l'origine  $\Pi_0(t) = P(\mathbf{r} = \mathbf{0}, t)$  ? Cette probabilité s'écrit de façon explicite sous la forme :

$$\Pi_0(t) = |\langle \psi(t=0) | \psi(t) \rangle|^2 . \quad (7.50)$$

Décomposant l'état initial  $|\psi(t=0)\rangle$  suivant la base des états propres  $|\Psi_k\rangle$  de l'Hamiltonien du système,

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_k a_k |\Psi_k\rangle , \quad (7.51)$$

on peut exprimer l'état  $|\psi(t)\rangle$  à l'instant  $t$  sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k a_k e^{-i\omega_k t} |\Psi_k\rangle . \quad (7.52)$$



Ainsi l'on voit que la probabilité de retour à l'origine est intimement liée à la décomposition de l'état initial sur la base des états propres :

$$\Pi_0(t) = \left| \sum_k |a_k|^2 e^{-i\omega_k t} \right|^2. \quad (7.53)$$

### B.1.1 Densité locale d'états

On peut caractériser l'Hamiltonien du système  $H$  via ses projections spectrales  $\hat{P}_\omega$  :

$$\hat{P}_\omega |\psi\rangle = a_\omega |\Psi_\omega\rangle, \quad (7.54)$$

où  $\omega$  appartient au spectre de  $H$ . On peut alors définir la densité *locale* d'états  $\rho(\psi, \omega)$  vis-à-vis de la condition initiale  $|\psi\rangle$  comme suit :

$$\begin{aligned} \rho(\psi, \omega) &= \langle \psi | \hat{P}_\omega | \psi \rangle \\ &= \sum_k |a_k|^2 \delta(\omega - \omega_k). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Ceci permet d'écrire la probabilité  $\Pi_0(t)$  sous la forme :

$$\Pi_0(t) = \left| \int d\omega \rho(\psi, \omega) e^{-i\omega t} \right|^2. \quad (7.56)$$

### B.1.2 Dimension de corrélation

La décroissance de la probabilité  $\Pi_0(t)$  est déterminée par les propriétés de la densité locale d'états  $\rho(\psi, \omega)$ . Une propriété fondamentale de la transition d'Anderson est qu'au régime critique, la densité locale d'états est multi-fractale. Nous précisons ici, de façon très succincte, comment caractériser cette multi-fractalité. On se référera aux articles [143] et [144] pour une discussion complète et rigoureuse de la notion fondamentale de multi-fractalité.

Parce que le concept de multi-fractalité fut d'abord introduit pour décrire les attracteurs chaotiques, nous prendrons l'exemple d'un tel objet. Comment caractériser un attracteur étrange ? Sa géométrie peut être complexe et difficile à décrire. Il est donc utile de se donner des moyens quantitatifs pour le caractériser. Sans doute, le moyen le plus simple est sa "dimension". Mais, comme on va le voir par la suite, la notion de dimension peut recouvrir de nombreux sens.

La dimension la plus usitée est la dimension de Hausdorff  $\mathcal{D}_0$  définie comme suit :

$$\mathcal{D}_0 = -\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\ln M(b)}{\ln b}. \quad (7.57)$$

Si l'objet que l'on souhaite caractériser existe dans un espace de dimension  $d$  ( $d$  est nécessairement un entier), alors  $M(b)$  est défini comme le nombre minimum d'hyper-cubes de dimension  $d$  et de côté  $b$  (formant une grille permettant un échantillonnage de tout l'espace) qu'il est nécessaire pour recouvrir l'attracteur. D'après l'équation (7.57), ce nombre

se comporte comme  $M(b) \sim b^{-\mathcal{D}_0}$ . Pour un objet non-fractal, la dimension de Hausdorff est entière. Dans le cas d'un objet fractal, i.e. d'un objet qui présente des fractures en tous points, la dimension de Hausdorff est non-entière.

Concernant un attracteur étrange, la procédure précédente ne permet pas de caractériser entièrement cet objet. Parmi les cubes recouvrant l'attracteur (et dans la limite où  $b \rightarrow 0$ ), certains sont beaucoup plus peuplés que d'autres. L'orbite de l'attracteur passe ainsi beaucoup de temps dans certains cubes et très peu de temps dans d'autres. Autrement dit, l'attracteur étrange n'est pas une fractale uniforme. Ainsi, une objection fondamentale à l'utilisation de la dimension de Hausdorff comme unique caractérisation d'un attracteur étrange est que l'on devrait être plus intéressé par les cubes où l'orbite passe beaucoup de temps, alors que  $\mathcal{D}_0$  ne permet pas de faire de distinction entre les cubes.

On peut généraliser la dimension de Hausdorff pour rendre compte du caractère non-uniforme de l'objet fractal considéré. Une infinité de dimensions  $\mathcal{D}_q$  peuvent être définies qui donnent plus ou moins de poids aux hyper-cubes les plus occupés [143]. Un objet est dit multi-fractal lorsque toutes les dimensions  $\mathcal{D}_q$  ont des valeurs *différentes*. Parmi les dimensions  $\mathcal{D}_q$ , une fondamentale est celle de corrélation,  $\mathcal{D}_2$ , définie comme suit :

$$\mathcal{D}_2 = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\ln C(b)}{\ln b}, \quad (7.58)$$

où  $C(b)$  compte le nombre de paires de points qui sont distants de moins de  $b$  l'un de l'autre. Dans le cas d'un attracteur étrange constitué de  $N$  points ( $N \rightarrow \infty$ ) notés  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $C(b)$  s'écrit sous la forme :

$$C(b) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \Theta(b - |X_i - X_j|), \quad (7.59)$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside. Hormis le cas où l'objet fractal est uniforme, la dimension de corrélation vérifie :  $\mathcal{D}_2 < \mathcal{D}$ .

Dans le cas du spectre local que nous considérons, la dimension de corrélation  $\mathcal{D}_2^\rho$  peut être définie par le comportement d'échelle :

$$\boxed{\gamma(b) = \int d\omega \rho(\psi, \omega) \int_{\omega-b/2}^{\omega+b/2} d\omega' \rho(\psi, \omega') \underset{b \rightarrow 0}{\sim} b^{\mathcal{D}_2^\rho}}. \quad (7.60)$$

La fonction  $\gamma(b)$  donne la probabilité que deux états propres entrant (avec leur poids associés) dans la décomposition de l'état initial  $|\psi\rangle$  aient une différence en énergie inférieure à  $b$ .

### B.1.3 Corrélations spectrales et probabilité de retour à l'origine

Montrons que la fonction de corrélation spectrale  $\gamma(b)$  est reliée à la probabilité de retour à l'origine  $\Pi_0(t)$ . Pour ce faire, introduisons la fonction caractéristique :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases} \quad (7.61)$$

avec  $A = [-b/2, b/2]$ . Cette fonction caractéristique permet de réécrire l'équation pour la fonction  $\gamma(b)$  (7.60) sous la forme :

$$\gamma(b) = \int d\omega \rho(\psi, \omega) \int d\omega' \chi_A(\omega - \omega') \rho(\psi, \omega'). \quad (7.62)$$

Cette relation fait apparaître un produit de convolution, qui s'écrit comme la transformée de Fourier inverse du produit des transformées de Fourier de  $\chi_A(\omega)$  et de  $\rho(\psi, \omega)$  :

$$\int d\omega' \chi_A(\omega - \omega') \rho(\psi, \omega') = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \frac{\sin(b\tau/2)}{\pi\tau} \rho(\psi, \tau). \quad (7.63)$$

Par conséquent, la probabilité  $\gamma(b)$  s'exprime comme suit :

$$\gamma(b) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \rho(\psi, \omega) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \rho(\psi, \tau) \frac{\sin(b\tau/2)}{\pi\tau}. \quad (7.64)$$

L'intégrale sur  $\omega$  fait apparaître une transformée de Fourier de la densité locale d'états :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \rho(\psi, \omega) e^{i\omega\tau} = 2\pi \rho(\psi, -\tau) = 2\pi \rho^*(\psi, \tau), \quad (7.65)$$

si bien que la probabilité  $\gamma(b)$  se réécrit :

$$\gamma(b) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \rho(\psi, \tau) \rho^*(\psi, \tau) \frac{\sin(b\tau/2)}{\tau}. \quad (7.66)$$

Or d'après l'équation (7.56), on a :  $\Pi_0(t) = 4\pi^2 \rho(\psi, \tau) \rho^*(\psi, \tau)$ . Par conséquent, la probabilité spectrale  $\gamma$  et la probabilité temporelle  $\Pi_0(t)$  sont reliées par :

$$\boxed{\gamma(b) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} d\tau \Pi_0(\tau) \frac{\sin(b\tau/2)}{\tau}}. \quad (7.67)$$

#### B.1.4 Fonction de corrélation temporelle

Dans la limite où  $b \rightarrow 0$  :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \Pi_0(\tau) \frac{\sin(b\tau/2)}{\tau} \sim \int_0^{2/b} d\tau \Pi_0(\tau) \frac{b}{2}. \quad (7.68)$$

Définissant la fonction de corrélation temporelle :

$$\boxed{C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t dt' \Pi_0(t')}, \quad (7.69)$$

on peut transcrire le comportement en loi de puissance pour  $\gamma(b)$  sous la forme d'une décroissance temporelle algébrique pour  $C(t)$ . En effet :

$$C(2/b) \underset{b \rightarrow 0}{\sim} \gamma(b) \underset{b \rightarrow 0}{\sim} b^{\mathcal{D}_2^p}, \quad (7.70)$$

ce qui se traduit par :

$$\boxed{C(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{-\mathcal{D}_2^p}}. \quad (7.71)$$

La dynamique de la fonction de corrélation temporelle  $C(t)$  (7.69) est donc caractérisée par la dimension de corrélation  $\mathcal{D}_2^\rho$  de la densité locale d'états  $\rho(\psi, \omega)$ . Dans le cas où la probabilité de retour à l'origine  $\Pi_0(t)$  a un comportement algébrique  $\Pi_0(t) \sim t^{-d_s}$ , l'exposant associé  $d_s$  est donc cette dimension de corrélation  $\mathcal{D}_2^\rho$  :

$$\boxed{d_s = \mathcal{D}_2^\rho}. \quad (7.72)$$

Mais quelle est la dimension de Hausdorff de cette densité d'états locale ? C'est ce que nous allons voir.

## B.2 Expansion du paquet d'ondes

Dans cette sous-section, nous rappelons un argument heuristique reliant l'expansion d'un paquet d'ondes initial  $|\psi\rangle$ , i.e. l'évolution temporelle de sa variance, à la dimension de Hausdorff  $\mathcal{D}_0^\rho$  de la densité locale d'états  $\rho(\psi, \omega)$ . Nous reprenons les discussions de cet argument précédemment publiées dans [96, 141, 145]. Nous considérons le cas d'un système 1D tel que le Kicked Rotor, mais dont le spectre et la dynamique ne sont pas nécessairement ceux d'un système localisé à temps long. Un tel système est par exemple le Kicked Harper [voir [141]]. Le raisonnement heuristique que nous allons présenter est une généralisation de l'argument trouvé dans [96] pour le Kicked Rotor qui conduit à une estimation de la longueur de localisation pour le Kicked Rotor en très bon accord avec les résultats numériques [92].

Supposons que nous considérions l'évolution temporelle d'un paquet d'ondes jusqu'à un temps  $t$ . Comme expliqué précédemment, le paquet d'ondes initial se décompose suivant la base des états propres de l'Hamiltonien du système, et les quasi-énergies associées aux états-propres entrant en compte dans cette décomposition forment le "spectre local". La dynamique de ce paquet d'ondes est essentiellement influencée par le fait que jusqu'au temps  $t$ , le spectre n'est pas résolu de façon exacte, mais avec une résolution limitée par le principe d'incertitude :  $\Delta\omega \sim t^{-1}$ .

Dire ceci permet de rendre compte de ce que le Kicked Rotor a d'abord une dynamique diffusive puis se localise. Ainsi, le spectre local associé au Kicked Rotor, qui est un système localisé, est discret, caractérisé par un espacement moyen entre niveaux voisins  $\Delta$ . Cependant, le caractère discret du spectre ne peut être résolu qu'après un temps suffisamment long  $t_\ell \sim 1/\Delta$ . C'est seulement au-delà de ce temps que le système se localise. En-deçà de ce temps, le système a une dynamique diffusive. Le spectre est en effet "perçu comme continu".

Nous pouvons étendre ce raisonnement au cas d'un système au spectre quelconque, i.e. pas nécessairement continu ni discret [141]. Explorer le spectre local des quasi-énergies avec la résolution limitée  $\Delta\omega \sim t^{-1}$  revient, en quelque sorte, à essayer de le recouvrir de segments de taille  $\Delta\omega$ . Comme toutes les quasi-énergies sont dans un intervalle fini  $[0, 2\pi]$ , le nombre  $N_\Psi(\Delta\omega)$  des segments nécessaires pour recouvrir le spectre correspond au nombre d'états propres entrant effectivement en compte dans la dynamique. Lorsque la taille de ces segments tend vers 0, le nombre  $N_\Psi(\Delta\omega)$  se comporte comme :

$$N_\Psi(\Delta\omega) \sim \Delta\omega^{-\mathcal{D}_0^\rho}, \quad (7.73)$$

où  $\mathcal{D}_0^\rho$  est la dimension de Hausdorff du spectre local. Ce qui peut se réécrire en représentation temporelle sous la forme :

$$N_\Psi(t) \sim t^{\mathcal{D}_0^\rho}, \quad (7.74)$$

dans la limite où  $t$  tend vers l'infini. Or, le nombre d'états propres entrant en compte dans la dynamique d'un paquet d'ondes de variance  $\langle l^2 \rangle(t)$  est de l'ordre de :

$$N_\Psi(t) \sim \sqrt{\langle l^2 \rangle(t)}. \quad (7.75)$$

De cette façon, on voit que le comportement de la variance d'un paquet d'ondes en fonction du temps vérifie une loi algébrique avec pour exposant deux fois la dimension de Hausdorff  $\mathcal{D}_0^\rho$  :

$$\boxed{\langle l^2 \rangle(t) \sim t^{2\mathcal{D}_0^\rho}}, \quad (7.76)$$

dans la limite des temps longs,  $t \rightarrow \infty$ .

### B.3 Densité locale d'état multi-fractale pour le Kicked Rotor quasi-périodique au régime critique

La dynamique de la fonction d'onde critique du Kicked Rotor quasi-périodique ayant pour condition initiale  $\psi_{\text{qp}}(p, t = 0) = \delta(p = 0)$  révèle la propriété multi-fractale de la densité locale d'états associée à sa condition initiale. Ainsi la variance du paquet d'ondes varie suivant une diffusion anormale avec exposant  $2/3$  (voir chapitre 5) :

$$\langle l^2 \rangle(t) \sim t^{2/3}, \quad (7.77)$$

ce qui, d'après l'argument heuristique précédemment introduit, indique une dimension de Hausdorff de la densité locale d'états valant :

$$\boxed{\mathcal{D}_0^\rho = \frac{1}{3}}. \quad (7.78)$$

Cependant, la probabilité de retour à l'origine  $\Pi_0(t)$  varie en fonction du temps suivant la loi algébrique :

$$\Pi_0(t) \sim t^{-d_s}, \quad (7.79)$$

avec l'exposant  $d_s = 0.29 \pm 0.01$  (voir figure 7.9). La dimension de corrélation  $\mathcal{D}_2^\rho = d_s$  de la densité locale d'états vaut donc :

$$\boxed{\mathcal{D}_2^\rho = 0.29 \pm 0.01 < \mathcal{D}_0^\rho = 1/3}. \quad (7.80)$$

Le fait que la dimension de corrélation  $\mathcal{D}_2^\rho$  est strictement inférieure à la dimension de Hausdorff  $\mathcal{D}_0^\rho$  signifie la multi-fractalité (i.e. au moins la bi-fractalité <sup>1</sup>) de la densité locale d'états. Cette multi-fractalité est responsable du “petit pic” observé pour la fonction d'onde critique au voisinage de  $lt^{-1/3} \approx 0$  (voir figure 7.7).

<sup>1</sup>Nous avons trouvé que les deux dimensions  $\mathcal{D}_0^\rho$  et  $\mathcal{D}_2^\rho$  étaient distinctes, et ceci atteste du caractère bi-fractal du spectre local. Pour démontrer le caractère multi-fractal attendu pour le spectre local, il faudrait, en toute rigueur, déterminer entièrement le spectre de dimensions  $\{\mathcal{D}_q^\rho\}_q$ . Ceci pourrait être fait en étudiant les corrélations temporelles à  $q$  points de la fonction d'onde telles que  $\psi^*(0, t_1)\psi^*(0, t_2)\psi(0, t_3)\psi(0, t_4)$  (à quatre points ici).

Il faut noter que la valeur de  $\mathcal{D}_2^\rho$  ainsi mesurée à partir de  $\Pi_0(t)$  est *universelle* : elle est indépendante du choix des paramètres  $\bar{k}$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$ , à compter du fait qu'ils vérifient les conditions d'incommensurabilité nécessaires à l'observation de la transition d'Anderson avec le Kicked Rotor quasi-périodique (voir chapitre 6).

Un autre point important qu'il faut souligner est le suivant. Contrairement à ce qu'elle paraît à première vue, la quantité que nous étudions  $\Pi_0(t) = |\psi_{\text{qp}}(p=0, t)|^2$  n'est pas égale à la probabilité de retour à l'origine pour le Kicked Rotor 3D avec pour condition initiale  $|\psi_3(t=0)\rangle$  correspondant à l'état initial  $|\psi_{\text{qp}}(t=0)\rangle$  pour le Kicked Rotor quasi-périodique. Or l'on sait (voir chapitre 5) qu'à l'instant  $t$ , l'état  $|\psi_3(t)\rangle$  vérifie :

$$\psi_3(\boldsymbol{\theta}, t) = \psi_{\text{qp}}(\theta_1, t) \delta(\theta_2 - \omega_2 t) \delta(\theta_3 - \omega_3 t), \quad (7.81)$$

pour l'Hamiltonien  $H_3$  du Kicked Rotor 3D, Eq. (7.26), associé au Kicked Rotor quasi-périodique. Ainsi, puisque les fréquences  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont incommensurables entre-elles et avec  $2\pi$ , la probabilité de retour à l'origine pour le Kicked Rotor 3D avec l'état initial  $|\psi_3(t=0)\rangle$  est nulle :

$$|\langle \psi_3(t) | \psi_3(t=0) \rangle|^2 = 0, \quad (7.82)$$

pour tout  $t > 0$ . L'application directe de la théorie développée aux sous-sections B.1 et B.2 n'est donc pas totalement fondée. Une justification plus rigoureuse du lien entre la dynamique du Kicked Rotor quasi-périodique et sa densité locale d'états reste à établir.

Enfin, il faut également noter que les dimensions multi-fractales mesurées pour le Kicked Rotor quasi-périodique ne se comparent pas de façon triviale avec celles mesurées dans le cas d'un système désordonné 3D usuel, au régime critique de la transition d'Anderson et ayant pour condition initiale un état piqué en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  [42]. Ces deux problèmes considèrent en effet des états initiaux très différents : l'état initial du Kicked Rotor quasi-périodique correspond à une source plane, tandis que celui du système désordonné 3D considéré en [42] est une source ponctuelle. Ceci se traduit par des propriétés multi-fractales quantitativement différentes. On peut néanmoins faire correspondre les dimensions de Hausdorff mesurées. Dans le cas d'un système désordonné 3D usuel, cette dimension  $\tilde{D}_0^\rho$  est l'unité. Elle est en effet reliée à l'expansion du paquet d'ondes via [142] :

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle \sim t^{2\tilde{D}_0^\rho/d}, \quad (7.83)$$

où  $d = 3$  (ceci généralise le résultat présenté à la sous-section B.2 en dimension trois). Ainsi, puisque l'on sait que  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle \sim t^{2/d}$  pour un système désordonné au régime critique, la dimension de Hausdorff d'un système désordonné 3D est trois fois celle correspondant au Kicked Rotor quasi-périodique, ceci à cause du fait que le Kicked Rotor quasi-périodique est un système uni-dimensionnel.



---

## Conclusion

---

Dans ce manuscrit, nous avons abordé le problème de la transition d'Anderson sous un jour nouveau : celui du chaos plutôt que du désordre, celui des atomes froids plutôt que des électrons. La pertinence de cette approche peut être vue dans ce qu'elle a permis de réaliser :

- la première observation expérimentale de la transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques,
- la validation expérimentale de la théorie d'échelle à un paramètre de la localisation,
- la première détermination expérimentale non-ambigüe de l'exposant critique  $\nu$  de la longueur de localisation,
- le calcul et l'observation de l'état critique du système au seuil de la transition.

Les limitations liées au dispositif expérimental, plutôt que d'empêcher l'observation de la transition, nous ont amené à donner une caractérisation beaucoup plus profonde utilisant les idées fondamentales du groupe de renormalisation. La plupart des méthodes développées n'auraient sans doute pas vu le jour dans un contexte de travail purement théorique. C'est bien l'interaction forte théorie-expérience qui a motivé notre démarche.

Également, nos travaux de thèse ont été tournés vers l'étude de la correspondance entre le chaos et le désordre, entre le Kicked Rotor quasi-périodique et les systèmes désordonnés 3D tels que modélisés par le modèle d'Anderson. Nous avons pu montrer l'exacte correspondance des comportements critiques de ces deux modèles : ils appartiennent à la même classe d'universalité, celle des systèmes désordonnés invariants par renversement du temps. Par ailleurs, la théorie auto-cohérente de la localisation s'applique au cas du Kicked Rotor quasi-périodique et donne des prédictions en très bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques.

L'intérêt du système considéré dans notre étude est double : Intérêt expérimental d'abord, puisqu'il a permis d'observer des phénomènes aussi fondamentaux que la localisation exponentielle, l'expansion diffusive ou la dynamique critique de la fonction d'onde, phénomènes difficiles voire impossibles à observer expérimentalement avec d'autres systèmes. Intérêt numérique ensuite, puisqu'il a permis une étude fine des différentes dynamiques de la localisation.



L'intérêt porté sur ce type de système dynamique pseudo-désordonné ne devrait pas décroître. Les perspectives d'étude sont en effet nombreuses et importantes.

## A Transition d'Anderson en dimension $d > 3$ avec le Kicked Rotor quasi-périodique

Pour une transition de phase thermodynamique du second ordre, il existe une dimension d'espace (la dimension critique supérieure) à partir de laquelle les exposants critiques sont ceux de la théorie de champ moyen. Dans le cas du modèle d'Ising, la dimension critique supérieure est  $d = 4$ . Dans le cas de la transition d'Anderson, il semble que la dimension critique supérieure soit infinie [146, 147], bien que certains arguments théoriques militent plutôt en faveur de  $d = 4$  [147]. En outre, une théorie semiclassique de la transition d'Anderson [146] suggère une expression analytique de la variation de l'exposant critique de localisation en fonction de la dimension :  $\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{d-2}$ . Or jusqu'à présent, aucune mesure précise des exposants critiques en dimension  $d \geq 4$  n'a pu être effectuée. La simulation d'un échantillon sous forme de barre  $L_{\perp}^{d-1} \times L$  (avec  $L \gg L_{\perp}$  longueur de la barre) ou de cube  $L^d$  est en effet extrêmement coûteuse en temps de calcul.

Une autre façon de simuler un système désordonné de dimensionnalité  $d$  est de considérer, comme cela a été montré dans ce manuscrit, le Kicked Rotor quasi-périodique à  $d$  fréquences incommensurables. L'avantage du Kicked Rotor quasi-périodique vis-à-vis du modèle d'Anderson de dimensionnalité  $d$  réside dans son caractère unidimensionnel. Ainsi, simuler la dynamique du kicked rotor quasi-périodique plutôt que celle du modèle d'Anderson permet une économie en temps de calcul de l'ordre de  $L^{d-1}$  [119].

L'étude des différentes dynamiques localisées (phase localisée) ou diffusives (phase métallique) permet, comme on l'a vu (voir chapitre 6), une mesure précise des exposants critiques. Au voisinage du seuil critique, l'ensemble des dynamiques peut être décrit par une loi d'échelle fonction du temps et du "désordre". C'est sur la caractérisation de cette loi d'échelle que repose la mesure des exposants critiques. En fait, la variable temps  $t$  peut-être vue comme l'équivalent du volume d'un échantillon du modèle d'Anderson :  $t \equiv L^d$  en dimension  $d$ . Comme dans le cas du modèle d'Anderson, la précision de la mesure dépend sensiblement de l'ambitus de variation de la variable temps. De ce fait, il nous faut simuler l'évolution du kicked rotor quasi-périodique sur des temps suffisamment grands pour avoir une estimation précise des exposants critiques. En dimension  $d = 3$  nous avons dû atteindre  $t = 10^6$ . En dimension  $d = 4$ , il faudrait simuler l'évolution sur un temps correspondant 100 fois plus grand :  $t = 10^8$ . Ceci est accessible, par exemple en utilisant des moyens informatiques tels que ceux de l'IDRIS. Nous avons déjà débuté cette étude.

Expérimentalement, l'observation de la transition d'Anderson en dimension quatre ne semble envisageable qu'en augmentant sensiblement les durées d'expérience (qui sont limitées à l'heure actuelle à  $t = 150$  kicks - voir chapitre 4), ce qui demande une refonte assez importante du dispositif expérimental. Parmi les pistes envisagées pour permettre d'augmenter ce temps maximal d'expérience, on peut citer le changement de configuration de l'onde stationnaire de la position horizontale à une station verticale, tout en veillant

à accompagner la chute des atomes en déphasant progressivement les faisceaux lasers contre-propageants.

## B Effets de la symétrie par renversement du temps sur la localisation : champ magnétique effectif

Une autre perspective très intéressante est l'étude de l'effet de la symétrie par renversement du temps sur les propriétés de localisation dynamique (voir section E du chapitre 3). Généralement, dans les systèmes désordonnés électroniques, cette symétrie est cassée du fait d'un champ magnétique uniforme. Dans le contexte des atomes froids, la réalisation d'un champ magnétique effectif pour les atomes électriquement neutres n'est pas tâche aisée [148–150]. Or, il semble que l'on puisse introduire un terme de “champ magnétique” effectif dans l'Hamiltonien du Kicked Rotor périodique [voir Eq. (3.61)]. Ce terme brise la symétrie par renversement du temps comme révélé par la statistique des niveaux de quasi-énergie (voir figure 3.8), et affecte la localisation dynamique du Kicked Rotor périodique 1D [101, 102]. En outre, l'introduction d'un tel terme semble réalisable expérimentalement. Comment se généralisent ces idées au cas du Kicked Rotor quasi-périodique ? Cette question est d'importance. On pourrait alors étudier expérimentalement les effets de localisation dynamique dans la classe unitaire, et, pourquoi pas, l'effet Hall quantique entier, prédit pour des systèmes faiblement désordonnés 2D en présence d'un champ magnétique transverse intense.

## C Approche statistique

Une approche fondamentale de la localisation et de la transition d'Anderson dont nous avons peu fait usage est celle statistique. La transition d'Anderson peut ainsi être révélée par un changement dans la distribution statistique des niveaux (voir section A.1 du chapitre 5 et section E du chapitre 3). Également, le régime critique peut être caractérisé par de fortes fluctuations statistiques de la fonction d'onde, intimement reliées au phénomène de multi-fractalité. Une telle approche de la localisation dans le Kicked Rotor quasi-périodique est hautement souhaitable et tout à fait envisageable sur le plan numérique. Cependant, il ne semble pas, a priori, qu'une étude statistique expérimentale puisse être menée de façon simple : la fonction d'onde expérimentale est effet auto-moyennée, au sens où elle est le résultat d'une moyenne de la dynamique sur un très grand nombre d'atomes indépendants (voir section A.1 du chapitre 4).

## D Interactions et désordre

Comment les interactions entre particules affectent la localisation est un problème dont l'analyse est d'une extrême complexité, tant sur le plan théorique que numérique [15–17]. Les expériences avec atomes froids sont très attendues sur ce sujet, entre autres du fait qu'elles permettent de contrôler la force des interactions entre atomes ultra-froids via

des résonances de Feshbach [26]. Le Kicked Rotor réalisé avec un condensat de Bose-Einstein [151, 152] est un candidat potentiel à l'étude des effets des interactions mutuelles sur la localisation.

---

# Annexe

---

## A Description diagrammatique du Kicked Rotor périodique 1D

Nous montrons dans ce manuscrit comment calculer, à partir de la théorie auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle [44], la fonction d'onde critique du Kicked Rotor quasi-périodique au seuil de la transition d'Anderson (voir section A du chapitre 7). Le fait que nous puissions appliquer cette théorie au cas du Kicked Rotor n'est pas trivial. Le Kicked Rotor diffère en effet d'un système désordonné usuel par sa dynamique classique déterministe qui ne peut pas toujours être assimilée à une marche aléatoire. C'est pourquoi, dans un premier temps, nous préciserons dans quel régime de paramètres le Kicked Rotor peut être considéré comme *effectivement* désordonné. Nous rappellerons ensuite comment l'on peut formuler une description diagrammatique [131] similaire à celle usuelle des systèmes faiblement désordonnés. Nous définirons alors les équivalents pour le Kicked Rotor de concepts clés de la théorie diagrammatique des systèmes désordonnés tels que le libre parcours moyen ou la fonction de Green moyennée sur le désordre. Nous montrerons enfin comment rendre compte de la diffusion classique à partir de cette théorie diagrammatique, et quelles sont les premières corrections quantiques à cette marche diffusive.

### A.1 Langage diagrammatique pour décrire le Kicked Rotor

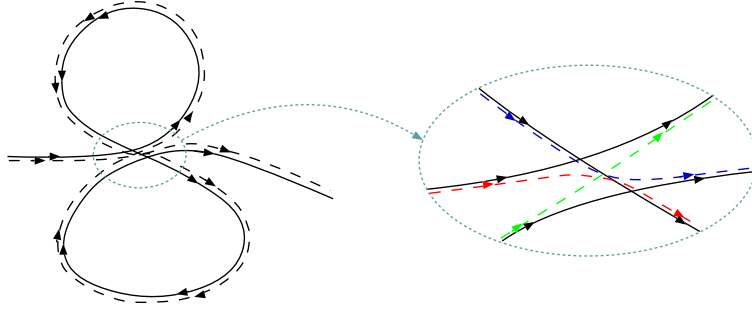
Nous considérons ici le cas du Kicked Rotor 1D. Nous généraliserons les résultats obtenus au cas qui nous intéresse, celui du Kicked Rotor 3D, par la suite.

#### A.1.1 Discussion qualitative de la localisation dynamique faible

*La discussion qualitative suivante est inspirée de celle figurant dans [104]. On se référera à [153] pour une discussion similaire dans le cas du gaz de Lorentz désordonné et à [154] dans le cas de cavités chaotiques en série.*

Lorsque  $K \gg \hbar$ , le temps de localisation  $t_\ell$  est très long :  $t_\ell \gg 1$ . Dans cette limite, le passage du régime diffusif initial au régime localisé final se fait très lentement. On observe alors un régime dit de *localisation dynamique faible* [132] pour les temps intermédiaires  $1 \ll t \ll t_\ell$ . On peut, pour décrire ce régime, envisager une approche perturbative en





**Fig. 9.2:** Couple de trajectoires formant deux boucles. Ce type de processus a un effet interférentiel qui survit à la moyenne sur le désordre mais dont la contribution est négligeable dans la limite de faible désordre par rapport à la simple boucle représentée en figure 9.1. Néanmoins, lorsque la symétrie par renversement du temps (A-2) est brisée, seul ce type de processus avec trajectoires parcourant les boucles *dans le même sens* subsiste.

fait qu'elle parcourt la boucle dans le sens inverse (voir Fig. 9.1). Plus précisément, les deux trajectoires considérées sont identiques avant et après la boucle, et inverses l'une de l'autre au sein de la boucle. Leur faible différence en longueur (et donc en phase) a pour seule origine le croisement permettant à ces trajectoires de passer d'apariées à contre-propageantes (voir figure 9.3). La taille caractéristique de ce croisement doit être faible devant  $\bar{k}$ .

Le fait que la propagation inverse soit possible le long de la boucle est garanti par la symétrie par renversement du temps que vérifie l'Hamiltonien (3.10) :

$$T_c : t \rightarrow -t, \theta \rightarrow -\theta, p \rightarrow p. \quad (\text{A-2})$$

La symétrie par renversement du temps  $T_c$  pour le Kicked Rotor correspond à celle usuelle pour les systèmes désordonnés :

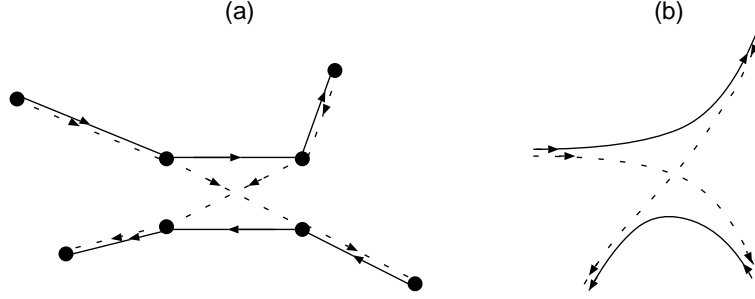
$$T : t \rightarrow -t, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \quad (\text{A-3})$$

via un échange du rôles des coordonnées et des impulsions.

Dans le régime de faible désordre (que nous identifierons par la suite), ces deux processus, trajectoires apariées et formant des boucles, sont prépondérants. Des trajectoires formant des noeuds plus complexes (voir figure 9.2) ont une contribution bien inférieure du fait que les croisements qu'elles engendrent sont de taille d'autant plus grande que le noeud est compliqué. Les boucles sus-mentionnées apportent une correction quantique à la marche classique diffusive en la restreignant. Elles ont pour effet d'abaisser la valeur du coefficient de diffusion classique. Cette diminution est le prémisses de la localisation forte : on parle de localisation faible.

### A.1.2 Dynamique chaotique déterministe et marche aléatoire

Le raisonnement qualitatif précédent est calqué sur celui utilisé dans le cas des systèmes désordonnés [45]. Pourtant, la dynamique du Kicked Rotor a une propriété qui la distingue fondamentalement de celle d'un système désordonné : la dynamique classique du



**Fig. 9.3:** (a) Dans un système désordonné, deux trajectoires parcourant des chemins identiques peuvent subitement prendre des routes différentes sous l'effet d'un événement de collision. Ceci rend possible le croisement représenté où les événements de collision sont représentés par des gros points noirs et les trajectoires sont représentées en trait plein et pointillé. (b) Dans le cas du Kicked Rotor, le croisement est autorisé du fait de l'instabilité de Lyapounov.

Kicked Rotor est déterministe alors que celle d'un système désordonné résulte d'un processus sans mémoire. Ainsi, dans un système désordonné, deux trajectoires initialement identiques peuvent prendre des routes différentes après un événement de collision (voir Fig. 9.3). Au contraire, deux trajectoires du Kicked Rotor coïncidant *exactement* à un point donné  $(\theta_n, p_n)$  restent identiques : la dynamique classique du Kicked Rotor est décrite de façon univoque par l'Application Standard (3.11). Ceci semble rendre caduc le scénario de localisation faible que nous avons exposé ci-dessus. Comment dépasser ce paradoxe ? En se rappelant que deux trajectoires ne doivent pas nécessairement être identiques pour interférer de manière systématique. Un faible écart entre les trajectoires est autorisé :  $\delta\theta\delta p \lesssim \hbar$ . Cette différence initiale est alors magnifiée (plus précisément croît de façon exponentielle) à mesure de l'application de kicks successifs (instabilité de Lyapounov), conduisant éventuellement à deux chemins contre-propageants formant une boucle (voir Fig. 9.3).

Considérons deux trajectoires qui se trouvent être initialement proches l'une de l'autre dans l'espace des phases :  $(\delta\theta, \delta p)$  tel que  $\delta\theta\delta p \lesssim \hbar$ . D'après l'Application Standard (3.11), cet écart croît suivant :

$$\delta\theta_n = \delta\theta_{n-1} (1 + K \cos \theta_{n-1}) + \delta p_{n-1}, \quad (\text{A-4})$$

Dans la limite  $K \gg 1$ , ceci conduit à :

$$\begin{aligned} \delta\theta_n &= \left( \delta\theta + \frac{\delta p}{K} \right) \prod_{k=0}^{n-1} (1 + K \cos \theta_k) \\ &\approx \left( \delta\theta + \frac{\delta p}{K} \right) e^{\lambda n}, \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

où  $\lambda$  est l'exposant de Lyapounov. Pour  $K \gg 1$ , on trouve [31, 81] :

$$\lambda = \langle \ln |K \cos \theta| \rangle_\theta \approx \ln(K/2). \quad (\text{A-6})$$

Or pour un écart entre les trajectoires tel que  $\delta\theta\delta p \lesssim \hbar$ , la valeur optimale de  $\delta\theta + \delta p/K$  est  $\sqrt{\hbar/K}$ . Dans ce cas,  $\delta\theta \approx \sqrt{\hbar/K} \ll 1$  (on se place dans le régime de localisation dynamique faible). Il faut ainsi attendre un temps caractéristique, appelé temps de Ehrenfest :

$$t_E = \frac{1}{\lambda} \ln \sqrt{K/\hbar} \quad (\text{A-7})$$

pour que l'écart initial  $\delta\theta_n \approx \sqrt{k/K} \ll 1$  soit magnifié jusqu'à  $\delta\theta_{n+t_E} \approx 1$  après quoi les trajectoires peuvent s'écarter l'une de l'autre de façon diffusive.

Dans le régime semi-classique où  $k \ll 1$ ,  $t_E$  peut être très grand,  $t_E \gg 1$  si  $Kk \ll 1$ . Dans ce cas, il faut incorporer aux corrections de localisation faible habituelles des termes liés à la dynamique dans la “région Lyapounov” [104, 132]. Nous ne considérerons pas ce régime ici. Il n'est pas accessible aux expériences avec atomes froids auxquelles nous nous intéressons. Comme nous nous restreignons au cas où  $K/k \gg 1$  et  $k \approx 1$ , le temps de Ehrenfest  $t_E \ll 1$  a un effet négligeable. Dès lors, on peut considérer que le Kicked Rotor est semblable à un système désordonné. Dans la suite, nous précisons cette analogie.

### A.1.3 Le Kicked Rotor aléatoire

L'évolution quantique du Kicked Rotor est déterminée par l'opérateur d'évolution sur une période qui s'écrit :

$$\hat{U} = e^{-iK \cos \hat{\theta}/k} e^{-i\hat{p}^2/2k}. \quad (\text{A-8})$$

Afin d'observer les phénomènes de diffusion ou localisation, on doit se placer dans l'espace des  $p$ . On choisit pour cet espace la base discrète  $|l\rangle = |p = kl + \beta\rangle$ , où  $l$  est un entier et  $\beta$  est le quasi-moment associé à la périodicité du potentiel  $K \cos(\theta)$  suivant  $\theta$  (théorème de Bloch). Le quasi-moment est conservé au cours de l'évolution temporelle. Dans la suite nous le considérerons comme nul,  $\beta = 0$ , sans perte de généralité.

La vision que l'on peut avoir de ce problème est celle d'un “modèle tight-binding dépendant du temps” dans lequel chaque site correspond à une valeur de  $l$ , et le système est périodiquement perturbé par un kick qui peut faire transiter une particule d'un site à un autre. Les valeurs des quasi-énergies associées aux sites  $\phi_l = kl^2/2 \bmod[2\pi]$ , peuvent être considérées comme distribuées de façon pseudo-aléatoire (voir section B.2 du chapitre 3 et [88, 89]). Ici, nous les prendrons distribuées de façon *complètement aléatoires*  $\phi_l \in [0, 2\pi]$ . Le fait de distribuer de façon complètement aléatoire les énergies sur site  $\phi_l$  permet de définir la notion de dynamique moyennée sur le désordre pour ce “modèle tight-binding pulsé”. Également, le caractère aléatoire des énergies sur site implique un déphasage total dans la base  $|l\rangle$  à chaque pas d'évolution (ce déphasage n'étant bien sûr dû qu'à la moyenne sur le désordre, i.e. aucun processus de diffusion inélastique ne rentre ici en jeu). La dynamique du Kicked Rotor aléatoire résulte donc d'un processus sans mémoire. Dans la limite où les corrélations entre les kicks sont négligeables,  $K/k \gg 1$  et  $k \approx 1$  (i.e.  $t_E \ll 1$ ), cette dynamique représente bien celle du véritable Kicked Rotor.

### A.1.4 Analogies avec les systèmes désordonnés usuels

La probabilité pour le Kicked Rotor aléatoire d'aller d'un site  $l_i$  à un site  $l_f$  en  $N$  pas s'écrit sous la forme :

$$P(l_i, l_f, t = N) \equiv |\langle l_f | (\hat{J}\hat{V})^N | l_i \rangle|^2. \quad (\text{A-9})$$

La transition de  $l_i$  à  $l_f$  consiste en des propagations décrites par l'opérateur kick  $\hat{J}$  :

$$\langle l_{n+1} | \hat{J} | l_n \rangle = \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iK \cos \theta/k} e^{-i(l_n - l_{n+1})\theta}, \quad (\text{A-10})$$



et en des “collisions” sur le potentiel désordonné  $V$  :

$$V(l_n) = e^{-i\phi_{l_n}} . \quad (\text{A-11})$$

Seul le potentiel  $V$  contient les phases aléatoires  $\phi_l$  sur lesquelles on moyenne.

Un point important qu’il faut souligner est que le propagateur  $\hat{J}$  n’est pas, comme on pourrait s’y attendre, l’équivalent de la fonction de Green libre  $G_0$ .  $\hat{J}$  joue le rôle de la fonction de Green moyennée sur le désordre  $\overline{G}$  [45]. Ainsi,  $\langle l_{n+1} | \hat{J} | l_n \rangle$  défini à l’équation (A-10) est, à une phase près, la fonction de Bessel  $J_{\Delta l_n}(K/\bar{k})$  qui décroît extrêmement vite pour des distances  $\Delta l_n = |l_n - l_{n+1}|$  grandes devant  $K/\bar{k}$  [87] :

$$J_{\Delta l_n}(K/\bar{k}) \sim \frac{1}{(\Delta l_n + 1)!} (K/\bar{k})^{\Delta l_n + 1} , \text{ pour } \Delta l_n \gg K/\bar{k} . \quad (\text{A-12})$$

$K$  peut être vu comme l’équivalent du libre parcours moyen. A chaque kick’, la distance parcourue est typiquement  $\Delta l_n \sim K/\bar{k}$ , soit encore,  $\Delta p \sim K$ . La limite de faible désordre correspondant à notre système est donc :

$$\boxed{\text{limite de faible désordre : } K/\bar{k} \gg 1} . \quad (\text{A-13})$$

Elle correspond à la divergence du rapport du libre parcours moyen sur la constante de Planck effective. Dans la suite, nous nous placerons dans cette limite  $k \equiv K/\bar{k} \gg 1$  et rappellerons [131] comment l’on peut traiter de manière perturbative le problème du transport dans le Kicked Rotor.

## A.2 Diffuson et dynamique classique diffusive

La probabilité  $P(l_i, l_f, t = N)$  est donnée par une somme sur toutes les trajectoires reliant les points  $l_i$  et  $l_f$ . Le calcul de la probabilité  $P$  fait apparaître des termes tels que :

$$\overline{V(l_i)V(l_1)...V(l_{N-1}) V^*(l_i)V^*(l'_1)...V^*(l'_{N-1})} , \quad (\text{A-14})$$

où  $\overline{X}$  représente la moyenne sur les phases  $\phi_{l_n}$  de la quantité  $X$  et où l’on a considéré deux trajectoires :

$$\mathcal{C}_N^R = l_i \rightarrow l_1 \rightarrow \dots \rightarrow l_{N-1} \rightarrow l_f , \quad (\text{A-15})$$

associée à une propagation dans le sens des temps croissants, c’est à dire entrant en compte dans  $\langle l_f | (\hat{J}\hat{V})^N | l_i \rangle$ , et :

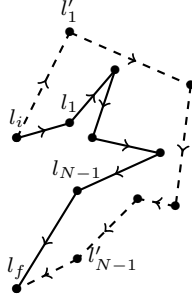
$$\mathcal{C}_N^A = l_i \rightarrow l'_1 \rightarrow \dots \rightarrow l'_{N-1} \rightarrow l_f , \quad (\text{A-16})$$

associée à la propagation conjuguée, i.e. à  $\langle l_f | (\hat{J}\hat{V})^N | l_i \rangle^*$ . On a de façon évidente :

$$\overline{V(l_i)V(l_1)...V(l_{N-1}) V^*(l_i)V^*(l'_1)...V^*(l'_{N-1})} = 0 , \quad (\text{A-17})$$

sauf si les ensembles de diffuseurs sont identiques  $\{l_1, l_2, \dots, l_{N-1}\} = \{l'_1, l'_2, \dots, l'_{N-1}\}$ .

En outre, dans la limite de faible désordre, la distance typique entre deux événements de collision,  $K$ , est très grande devant  $\bar{k}$ . Si bien que deux trajectoires n’ayant pas exactement la même séquence de collisions sont déphasées d’une phase aléatoire, proportionnelle à la différence de longueur entre les trajectoires, soit très grande devant  $2\pi$ . Après moyenne



**Fig. 9.4:** Représentation imagée de deux trajectoires,  $\mathcal{C}_N^R$  [voir Eq. (A-15)] associée à la propagation dans le sens des temps croissants décrite par  $\langle l_f | (\hat{J}\hat{V})^N | l_i \rangle$  et  $\mathcal{C}_N^A$  [voir Eq. (A-16)] associée à la propagation conjuguée décrite par  $\langle l_i | (\hat{J}\hat{V})^N | l_f \rangle^*$ .

sur le désordre, les contributions interférentielles venant de ce type de trajectoires sont négligeables. On ne retiendra ici que les contributions venant de trajectoires exactement identiques. L'étude des trajectoires formant des boucles sera faite par la suite. Comme les trajectoires considérées ici sont apariées, elles ont même longueur, et donc même phase. Le processus de transport que nous retenons, dans l'approximation dite "Diffuson", est donc *classique*. Il conduit à la diffusion classique prédite pour le régime classique et chaotique du Kicked Rotor.

Le Diffuson est un processus de transport où les trajectoires  $\mathcal{C}^R$  et  $\mathcal{C}^A$  sont identiques. Il est ainsi constitué de termes tels que :

$$\left[ \langle l_f | \hat{U} | l_{N-1} \rangle \langle l_{N-1} | \hat{U} | l_{N-2} \rangle \dots \langle l_1 | \hat{U} | l_i \rangle \right] \times c.c. \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} l_i & l_1 & l_2 & & l_{N-2} & l_{N-1} & l_f \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \\ \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array} \end{array} \quad (A-18)$$

où l'on a représenté  $\langle l_{n+1} | \hat{J} | l_n \rangle$  par  $l_n \xrightarrow{l_{n+1}}$  et  $\langle l_{n+1} | \hat{J}^\dagger | l_n \rangle$  par  $l_n \dashrightarrow l_{n+1}$ , et  $\begin{array}{c} l_n \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} = 1$  représente un événement de collision commun aux trajectoires  $\mathcal{C}^R$  et  $\mathcal{C}^A$ .

### A.2.1 Équation de Bethe-Salpether

Notons  $P_D(l_i, l_f, t = N)$  la contribution du Diffuson à la probabilité  $P$  [Eq. (A-9)]. Elle s'écrit comme la somme sur les amplitudes quantiques associées à chaque paire de trajectoires apariées reliant  $l_i$  à  $l_f$  en  $N$  pas :

$$P_D(l_i, l_f, t = N) = \sum_{\{l_n\}} \left[ \langle l_f | \hat{U} | l_{N-1} \rangle \langle l_{N-1} | \hat{U} | l_{N-2} \rangle \dots \langle l_1 | \hat{U} | l_i \rangle \right] \times c.c. . \quad (A-19)$$

Elle vérifie la relation de récurrence :

$$P_D(l_i, l_f, t = N + 1) = \sum_{l_N} |\langle l_f | \hat{J} | l_N \rangle|^2 \times P_D(l_i, l_N, t = N) . \quad (A-20)$$

En passant en représentation fréquentielle par la transformée de Fourier discrète :

$$P_D(l_i, l_f, \omega) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{i\omega N} P_D(l_i, l_f, t = N) , \quad (\text{A-21})$$

la relation de récurrence pour  $P_D$  s'exprime sous la forme d'une équation de Bethe-Salpether :

$$P_D(l_i, l_f, \omega) = \delta_{l_i, l_f} + e^{i\omega} \sum_{l_1} |\langle l_f | \hat{J} | l_1 \rangle|^2 \times P_D(l_i, l_1, \omega) . \quad (\text{A-22})$$

Après moyenne sur le désordre, le problème est invariant par translation  $P_D(l_i, l_f, \omega) = P_D(l_i - l_f, \omega)$  si bien que l'on peut définir  $P_D$  dans l'espace réciproque :

$$P_D(\varphi, \omega) \equiv \sum_{l_i - l_f} e^{-i\varphi(l_i - l_f)} P_D(l_i, l_f, \omega) . \quad (\text{A-23})$$

Avant de pouvoir exprimer l'équation de Bethe-Salpether dans l'espace réciproque, il nous faut déterminer le terme  $|\langle l_f | \hat{J} | l_1 \rangle|^2$  :

$$|\langle l_f | \hat{J} | l_1 \rangle|^2 = \int \frac{d\theta_+}{2\pi} \frac{d\theta_-}{2\pi} e^{ik(\cos \theta_+ - \cos \theta_-)} e^{i(\theta_+ - \theta_-)(l_i - l_f)} . \quad (\text{A-24})$$

On utilise la formule de trigonométrie :  $\cos \theta_+ - \cos \theta_- = -2 \sin \frac{\theta_+ + \theta_-}{2} \sin \frac{\theta_+ - \theta_-}{2}$  et on procède au changement de variable  $(\theta_+, \theta_-) \rightarrow (\theta = \frac{\theta_+ + \theta_-}{2}, \varphi = \theta_+ - \theta_-)$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned} |\langle l_f | \hat{J} | l_1 \rangle|^2 &= \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i2k \sin \theta \sin \frac{\varphi}{2}} e^{i\varphi(l_i - l_f)} \\ &= \int \frac{d\varphi}{2\pi} J_0 \left( 2k \sin \frac{\varphi}{2} \right) e^{i\varphi(l_i - l_f)} . \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

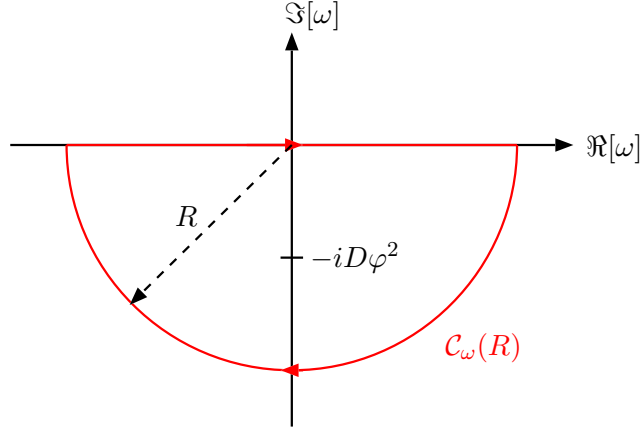
Finalement, utilisant la propriété de la transformée de Fourier d'un produit de convolution qui s'écrit comme le produit des transformées de Fourier, on peut exprimer l'équation de Bethe-Salpether pour le Diffuson dans l'espace réciproque et en représentation fréquentielle :

$$\boxed{P_D(\varphi, \omega) = 1 + e^{i\omega} J_0 \left( 2k \sin \frac{\varphi}{2} \right) P_D(\varphi, \omega)} . \quad (\text{A-26})$$

### A.2.2 Limite diffusive

Dans la limite de faible désordre  $k \gg 1$ , la fonction de Bessel  $J_0(2k \sin \frac{\varphi}{2})$  est négligeable sauf si  $\varphi k \ll 1$ . On considère donc la limite  $\varphi k \ll 1$  qui correspond à la limite des grandes distances  $l_i - l_f \gg k$ , ainsi que la limite des temps long qui s'écrit  $\omega \ll 1$ . Dans cette limite, communément appelée *limite diffusive* ou régime hydrodynamique, le Diffuson  $P_D$  [voir Eq. (A-26)] prend la forme approchée :

$$\begin{aligned} P_D(\varphi, \omega) &= \frac{1}{1 - e^{i\omega} J_0(2k \sin \frac{\varphi}{2})} \\ &\approx \frac{1}{1 - (1 + i\omega) \left( 1 - \frac{(k\varphi)^2}{4} \right)} . \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$



**Fig. 9.5:** Contour d'intégration  $\mathcal{C}_\omega(R)$  (en rouge) pour le calcul de l'intégrale Eq. (A-29).

Conclusion, le Diffuson présente un pôle Diffusif dans le régime hydrodynamique  $k\varphi \ll 1$ ,  $\omega \ll 1$  :

$$P_D(\varphi, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D\varphi^2}, \quad (\text{A-28})$$

où l'on a noté  $D = k^2/4$ .

### A.2.3 Diffusion classique

Afin de voir comment le Diffuson décrit la diffusion classique du Kicked Rotor, on peut chercher d'abord l'expression de sa dépendance temporelle :

$$P_D(\varphi, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{-i\omega + D\varphi^2}. \quad (\text{A-29})$$

L'intégrale se calcule aisément au moyen du théorème des résidus. Du fait que  $t > 0$ , le contour d'intégration  $\mathcal{C}_\omega(R)$  peut être pris comme indiqué dans la Fig. 9.5. On obtient, en prenant la limite  $R \rightarrow \infty$  :

$$P_D(\varphi, t) = e^{-D\varphi^2 t}. \quad (\text{A-30})$$

Dans l'espace réel, on a donc :

$$P_D(l_i, l_f, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(l_i - l_f)^2}{4Dt}}. \quad (\text{A-31})$$

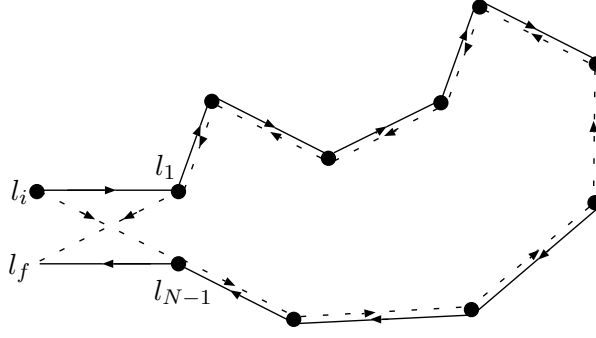
On retrouve ainsi le comportement diffusif du Kicked Rotor dans les régimes classiques et chaotiques (voir section A.1.3 du chapitre 3) :

$$\begin{aligned} \langle l^2 \rangle(t) &= \sum_l l^2 P_D(l, t) \\ &= 2Dt, \end{aligned} \quad (\text{A-32})$$

soit encore, exprimé pour le moment angulaire  $p$  :

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle(t) &= k^2 \langle l^2 \rangle(t) \\ &= 2D_{cl} t, \end{aligned} \quad (\text{A-33})$$

avec  $D_{cl} = K^2/4 = \hbar^2 D$ .



**Fig. 9.6:** Deux trajectoires formant une boucle constitutives du Cooperon. Les sens de propagation de chaque trajectoire le long de la boucle sont opposés.

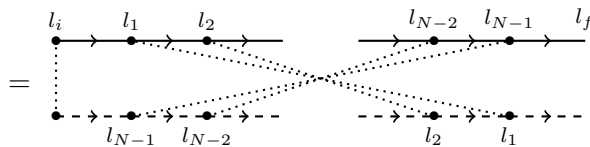
### A.3 Cooperon et corrections quantiques

Nous avons, jusqu'à présent, rendu compte de la dynamique *classique* diffusive du Kicked Rotor. Le processus responsable de cette dynamique, le Diffuson, regroupe l'ensemble des trajectoires apariées. Le Diffuson est la contribution "classique" au transport quantique dans le Kicked Rotor.

Nous devons maintenant nous préoccuper des corrections quantiques à cette marche classique diffusive. De même que pour les systèmes désordonnés habituels [étant symétriques par renversement du temps, voir Eq. (A-2)], dans le Kicked Rotor, ces corrections sont essentiellement dues aux interférences de trajectoires formant des boucles telles que celle représentée en Fig. 9.1. On appelle usuellement ces boucles Cooperon. Les effets interférentiels dus au Cooperon survivent à la moyenne sur le désordre. Dans la limite de faible désordre  $k \gg 1$  et dans le régime de localisation dynamique faible  $1 \ll t \ll t_\ell$ , le Cooperon a une contribution plus faible que celle du Diffuson (si le Diffuson est d'ordre 1, le Cooperon est d'ordre  $1/k \ll 1$ ). Cependant, les trajectoires formant des noeuds (noeud de huit par exemple, voir figure 9.2) plus compliqués ont un poids négligeable en comparaison de celui du Cooperon [104]. Le Cooperon est ainsi la correction quantique la plus importante. C'est pourquoi on se contentera de décrire cette correction ici.

Considérons deux trajectoires formant une boucle telles que celles représentées en Fig. 9.6. Elles sont associées à l'amplitude :

$$\left[ \langle l_f | \hat{U} | l_{N-1} \rangle \langle l_{N-1} | \hat{U} | l_{N-2} \rangle \dots \langle l_1 | \hat{U} | l_i \rangle \right] \times \left[ \langle l_f | \hat{U} | l_1 \rangle \langle l_1 | \hat{U} | l_2 \rangle \dots \langle l_{N-1} | \hat{U} | l_i \rangle \right]^*$$



(A-34)

### A.3.1 Facteur de structure du Cooperon

Le Cooperon  $P_C$  s'écrit comme la somme sur toutes les trajectoires formant une boucle telles que celles décrites ci-dessus. On peut l'écrire formellement sous la forme :

$$P_C(l_i, l_f, t = N) = \sum_{l_1, l_{N-1}} \langle l_f | \hat{J} | l_{N-1} \rangle \langle l_1 | \hat{J} | l_i \rangle \langle l_f | \hat{J}^\dagger | l_1 \rangle \langle l_{N-1} | \hat{J}^\dagger | l_i \rangle \Gamma^C(l_1, l_{N-1}, N-2), \quad (\text{A-35})$$

où  $N \geq 3$  et  $\Gamma^C(l_1, l_{N-1}, N-2)$  est le facteur de structure du Cooperon qui s'écrit comme la somme sur toutes les trajectoires contre-propageantes reliant  $l_1$  à  $l_{N-1}$  en  $N-2$  pas. Ainsi :

$$\Gamma^C(l_1, l_2, 1) = \begin{array}{c} l_1 \quad l_2 \\ \text{---} \rightarrow \quad \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \leftarrow \quad \text{---} \leftarrow \\ l_2 \quad l_1 \end{array}, \quad (\text{A-36})$$

et

$$\Gamma^C(l_1, l_{N+1}, N) = \begin{array}{c} l_1 \quad \text{---} \rightarrow \quad \text{---} \rightarrow \quad \text{---} \rightarrow \quad l_{N+1} \\ \text{---} \leftarrow \quad \text{---} \leftarrow \quad \text{---} \leftarrow \quad \text{---} \leftarrow \quad l_{N+1} \\ l_{N+1} \quad \text{---} \leftarrow \quad \text{---} \leftarrow \quad \text{---} \leftarrow \quad l_1 \end{array}. \quad (\text{A-37})$$

De même que pour le Diffuson, il nous faut passer en représentation fréquentielle pour aller plus avant dans l'étude du Cooperon. Pour ce faire, on définit :

$$P_C(l_i, l_f, \omega) = \sum_{N=3}^{+\infty} e^{i\omega N} P_C(l_i, l_f, t = N), \quad (\text{A-38})$$

et :

$$\Gamma_\omega^C(l_1, l_2) = \sum_{N=1}^{+\infty} e^{i\omega N} \Gamma^C(l_1, l_2, N). \quad (\text{A-39})$$

On vérifie facilement que le Cooperon  $P_C(l_i, l_f, \omega)$  s'écrit sous la forme :

$$P_C(l_i, l_f, \omega) = \sum_{l_1, l_2} \langle l_f | \hat{J} e^{i\omega_0+} | l_2 \rangle \langle l_1 | \hat{J} e^{i\omega_0+} | l_i \rangle \langle l_f | \hat{J}^\dagger e^{-i\omega_0-} | l_1 \rangle \langle l_2 | \hat{J}^\dagger e^{-i\omega_0-} | l_i \rangle \Gamma_\omega^C(l_1, l_2), \quad (\text{A-40})$$

où  $\omega_{0\pm} = \omega_0 \pm \omega/2$  avec  $\omega_0$  une fréquence arbitraire. Dans la théorie des systèmes désordonnés,  $\omega_0$  joue le rôle de l'énergie de l'onde incidente. Ici,  $\omega_0$  n'a pas de signification physique et est introduit de façon quelque peu artificielle, mais qui permet de mieux voir l'analogie entre le formalisme développé ici et celui décrivant les systèmes désordonnés [45]. Poursuivant dans cette analogie, nous changeons de notation pour les propagateurs :

$$\mathcal{J}_{\omega_0+}^R(l_1, l_2) \equiv \langle l_2 | \hat{J} e^{i\omega_0+} | l_1 \rangle \equiv \text{---} \gg \text{---}, \quad (\text{A-41})$$

$$\mathcal{J}_{\omega_0-}^A(l_1, l_2) \equiv \langle l_2 | \hat{J}^\dagger e^{-i\omega_0-} | l_1 \rangle \equiv \text{---} \ll \text{---}. \quad (\text{A-42})$$

Le facteur de structure  $\Gamma_\omega^C(l_1, l_2)$  s'écrit :

$$\Gamma_\omega^C(l_1, l_2) = \begin{array}{c} l_1 \quad l_2 \\ \text{---} \gg \quad \text{---} \gg \\ \text{---} \ll \quad \text{---} \ll \\ l_2 \quad l_1 \end{array} + \begin{array}{c} l_1 \quad l_2 \\ \text{---} \gg \quad \text{---} \gg \quad \text{---} \gg \\ \text{---} \ll \quad \text{---} \ll \quad \text{---} \ll \\ l_2 \quad l_1 \end{array} + \begin{array}{c} l_1 \quad l_2 \\ \text{---} \gg \quad \text{---} \gg \quad \text{---} \gg \quad \text{---} \gg \\ \text{---} \ll \quad \text{---} \ll \quad \text{---} \ll \quad \text{---} \ll \\ l_2 \quad l_1 \end{array} + \dots, \quad (\text{A-43})$$

soit encore :

$$\Gamma_{\omega}^C(l_1, l_2) \equiv \boxed{\Gamma_{\omega}^C}^{l_1, l_2} = \begin{array}{c} l_1 \quad l_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} l_1 \quad l_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} l_1 \quad l_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} l_1 \quad l_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \dots \quad (\text{A-44})$$

Considérons  $\tilde{\Gamma}^C$  défini comme suit :

$$\tilde{\Gamma}_{\omega}^C(l_1, l_2) \equiv \Gamma_{\omega}^C(l_1, l_2) + \begin{array}{c} l_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \end{array} . \quad (\text{A-45})$$

On montre facilement que  $\tilde{\Gamma}^C$  vérifie :

$$\boxed{\tilde{\Gamma}_{\omega}^C}^{l_1, l_2} = \begin{array}{c} l_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \end{array} + \boxed{\tilde{\Gamma}_{\omega}^C}^{l_1, l_3} \begin{array}{c} l_3 \quad l_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} , \quad (\text{A-46})$$

La symétrie par renversement du temps revêt ici la forme  $\mathcal{J}_{\omega_0-}^A(l_2, l_3) = \mathcal{J}_{\omega_0-}^A(l_3, l_2)$  qui implique :

$$\boxed{\tilde{\Gamma}_{\omega}^C}^{l_1, l_2} = \begin{array}{c} l_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \end{array} + \boxed{\tilde{\Gamma}_{\omega}^C}^{l_1, l_3} \begin{array}{c} l_3 \quad l_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} , \quad (\text{A-47})$$

ce qui se réécrit de façon explicite sous la forme :

$$\tilde{\Gamma}_{\omega}^C(l_1, l_2) = \delta_{l_1, l_2} + e^{i\omega} \sum_{l_3} |\langle l_2 | \hat{J} | l_3 \rangle|^2 \times \tilde{\Gamma}_{\omega}^C(l_1, l_3) , \quad (\text{A-48})$$

qui n'est autre que l'équation (A-22) pour le Diffuson. Ainsi,  $\tilde{\Gamma}^C = P_D$ . Passant dans l'espace réciproque, le facteur de structure du Cooperon s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega}^C(\varphi) &= \tilde{\Gamma}_{\omega}^C(\varphi) - 1 \\ &= P_D(\varphi, \omega) - 1 \\ &= \frac{1}{1 - e^{i\omega} J_0(2k \sin \frac{\varphi}{2})} - 1 . \end{aligned} \quad (\text{A-49})$$

Dans l'équation précédente, le premier terme du membre de droite a un pôle diffusif ; on peut donc négliger le second terme 1. Conclusion, dans la limite diffusive  $\omega \ll 1$  et  $\varphi k \ll 1$ , le facteur de structure du Cooperon est identique à celui du Diffuson :

$$\boxed{\Gamma_{\omega}^C(\varphi) \approx \frac{1}{-i\omega + D\varphi^2}} . \quad (\text{A-50})$$

### A.3.2 Cooperon dans l'espace réciproque

L'expression du Cooperon dans l'espace réciproque n'est pas absolument triviale : au contraire du Diffuson, le Cooperon ne s'écrit pas comme produits de convolution [voir

Eq. (A-22)], mais sous la forme plus complexe (A-40). On montre [45] qu'on peut l'écrire sous la forme

$$P_C(\varphi, \omega) = \int \frac{d\varphi_0}{2\pi} \frac{d\varphi'_0}{2\pi} \tilde{P}_0(\varphi_0, \varphi, \omega) \tilde{P}_0(\varphi'_0, \varphi, \omega) \Gamma_\omega^C(\varphi_0 + \varphi'_0), \quad (\text{A-51})$$

où l'on a noté  $\tilde{P}_0(\varphi_0, \varphi, \omega) = \mathcal{J}_{\omega_0+}^R(\varphi_0 + \varphi/2) \mathcal{J}_{\omega_0-}^A(\varphi_0 - \varphi/2)$  [voir Eq. (A-41)]. Le produit  $\tilde{P}_0(\varphi_0, \varphi, \omega) \tilde{P}_0(\varphi'_0, \varphi, \omega)$  s'exprime de façon explicite comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(\varphi_0, \varphi, \omega) \tilde{P}_0(\varphi'_0, \varphi, \omega) &= e^{-ik \cos(\varphi_0 + \varphi/2)} e^{i\omega_0+} \times e^{ik \cos(\varphi_0 - \varphi/2)} e^{-i\omega_0-} \\ &\times e^{-ik \cos(\varphi'_0 + \varphi/2)} e^{i\omega_0+} \times e^{ik \cos(\varphi'_0 - \varphi/2)} e^{-i\omega_0-}. \end{aligned} \quad (\text{A-52})$$

Quelques simplifications utilisant des formules trigonométriques bien connues donnent :

$$\tilde{P}_0(\varphi_0, \varphi, \omega) \tilde{P}_0(\varphi'_0, \varphi, \omega) = e^{i2\omega} \exp \left[ i4k \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi_0 + \varphi'_0}{2} \right) \cos \left( \frac{\varphi_0 - \varphi'_0}{2} \right) \right] \quad (\text{A-53})$$

Nous pouvons donc exprimer le Cooperon sous la forme :

$$P_C(\varphi, \omega) = \int \frac{d\varphi_1}{2\pi} \frac{d\varphi_2}{2\pi} e^{i2\omega} \exp \left[ i4k \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi_1}{2} \right) \cos \varphi_2 \right] \Gamma_\omega^C(\varphi_1), \quad (\text{A-54})$$

où nous avons procédé au changement de variable  $(\varphi_0, \varphi'_0) \rightarrow [\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi'_0, \varphi_2 = (\varphi_0 - \varphi'_0)/2]$ .

On peut intégrer sur la variable  $\varphi_2$  et ainsi obtenir :

$$P_C(\varphi, \omega) = \int \frac{d\varphi_1}{2\pi} e^{i2\omega} J_0 \left[ -4k \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \Gamma_\omega^C(\varphi_1). \quad (\text{A-55})$$

### A.3.3 Cooperon dans la limite diffusive

Dans les limites de faible désordre  $k \gg 1$  et diffusive  $\varphi k \ll 1$ ,  $\omega \ll 1$ , on utilise la forme asymptotique de la fonction de Bessel  $J_0(x) \approx 1$  au voisinage de  $x = 0$  pour approximer le Cooperon suivant :

$$P_C(\varphi, \omega) \approx \int \frac{d\Phi}{2\pi} \Gamma_\omega^C(\Phi). \quad (\text{A-56})$$

Finalement, on obtient :

$$P_C(\varphi, \omega) \approx \int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + D\Phi^2}. \quad (\text{A-57})$$

Contrairement au Diffuson, le Cooperon ne dépend pas de  $\varphi$ . Il est donc localisé dans l'espace des  $p$ .

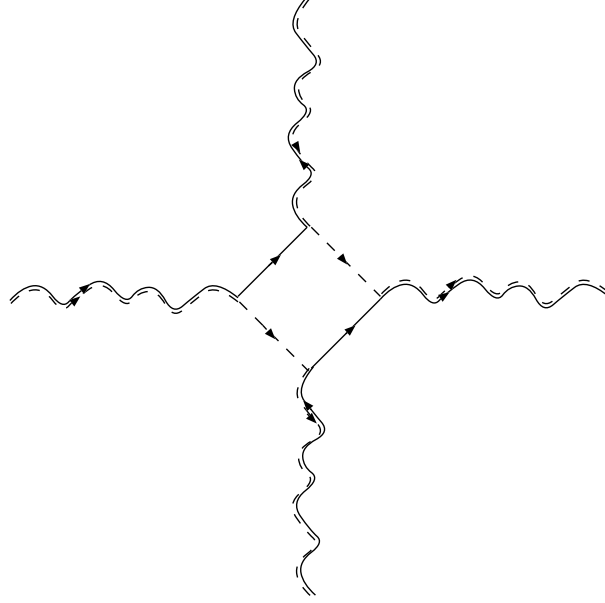
## A.4 Description de la localisation dynamique faible

La contribution du Cooperon précédemment identifiée pose le problème de la normalisation de la probabilité totale  $P(l_i, l_f, \omega)$  qui s'écrit comme la somme des différentes contributions : Diffuson, Cooperon, etc. En effet, le Diffuson est déjà normalisé [45] :

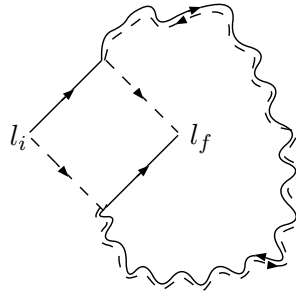
$$P_D(\varphi = 0, \omega) = \frac{i}{\omega}. \quad (\text{A-58})$$

La contribution du Cooperon n'étant pas nulle, la seule somme  $P = P_D + P_C$  n'est de fait pas normalisée. Nous avons donc omis des contributions du même ordre que le Cooperon qui, lorsqu'on en tient compte, rétablissent la normalisation.





**Fig. 9.7:** Vertex interférentiel permettant de coupler des Diffusons symbolisés par les lignes pleines et tiretées faisant des ondulations.



**Fig. 9.8:** Représentation du Cooperon faisant apparaître un vertex interférentiel.

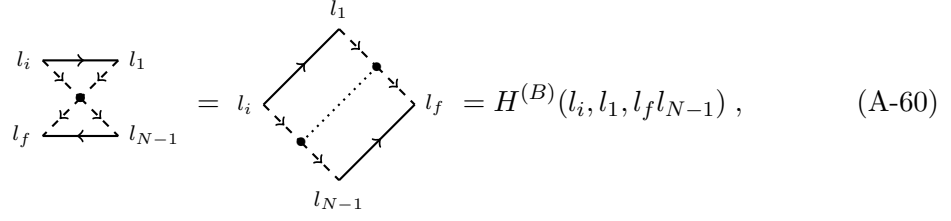
#### A.4.1 Vertex interférentiel

Pour résoudre le problème de la normalisation de  $P$  dans le cas de systèmes désordonnés, on introduit généralement le concept de vertex interférentiel, ou encore boîte de Hikami [45]. Un vertex interférentiel permet de coupler des Diffusons entre eux, comme représenté en figure 9.7. Le Cooperon contient d'ailleurs un vertex interférentiel, puisqu'il peut se représenter comme suivant la figure 9.8. Le vertex interférentiel associé au Cooperon n'est autre que le croisement représenté en figure 9.6 :

$$\begin{array}{c} l_i \rightarrow \quad \leftarrow l_1 \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ \leftarrow l_f \quad \rightarrow l_{N-1} \end{array} = \begin{array}{c} l_1 \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ l_i \quad \quad l_f \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ l_{N-1} \end{array} = H^{(A)}(l_i, l_1, l_f, l_{N-1}) . \quad (\text{A-59})$$

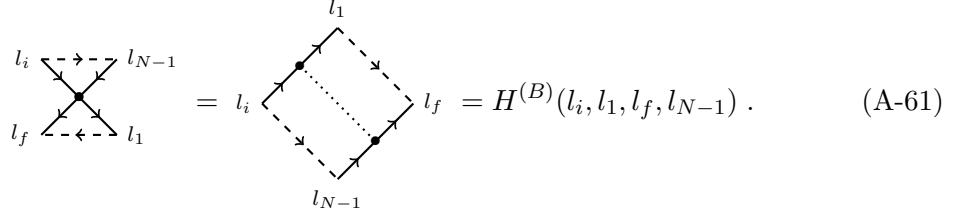
Dans le cas d'un système désordonné usuel, on montre qu'il existe deux autres vertex

interférentiels du même ordre que celui du Cooperon :



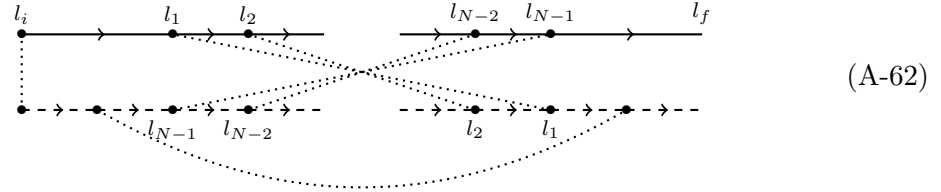
$$l_i, l_1, l_f, l_{N-1} = l_i, l_1, l_f, l_{N-1} = H^{(B)}(l_i, l_1, l_f, l_{N-1}), \quad (\text{A-60})$$

et :



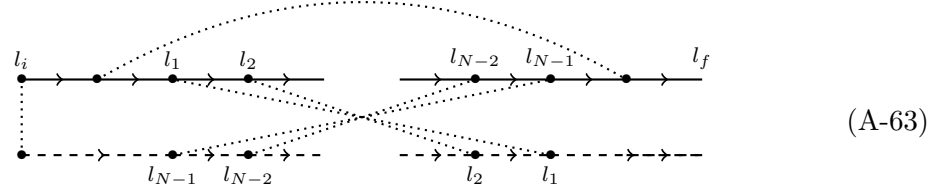
$$l_i, l_1, l_f, l_{N-1} = l_i, l_1, l_f, l_{N-1} = H^{(B)}(l_i, l_1, l_f, l_{N-1}). \quad (\text{A-61})$$

Tenir compte de ces nouveaux vertex interférentiels consiste à habiller du désordre le Cooperon. Ainsi, le vertex  $H^{(B)}$  correspond à :



$$(\text{A-62})$$

et le vertex  $H^{(C)}$  à :



$$(\text{A-63})$$

Dans le cas du Kicked Rotor, ces contributions n'existent pas. Le modèle de désordre considéré pour ce système [voir Eq. (A-11)] implique en effet :

$$\begin{aligned} \overline{V(l)V(l)} &= 0, \\ \overline{V^*(l)V^*(l)} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A-64})$$

Ainsi, il ne peut y avoir de collision qui survive à la moyenne sur le désordre autre que partagée entre les chemins direct  $\longrightarrow$  et conjugué  $\dashrightarrow$ . On voit d'ailleurs que des processus où les nombres de collisions pour les chemins direct et conjugué ne sont pas les mêmes ne sont pas inclus dans la probabilité que nous voulons calculer :

$$P(l_i, l_f, t = N) \equiv |\langle l_f | (\hat{J}\hat{V})^N | l_i \rangle|^2. \quad (\text{A-65})$$

Ceci se retrouve également dans l'indépendance du problème vis-à-vis de l'“énergie incidente”  $\omega_0$  [voir Eq. (A-40)].

Le problème de la normalisation de  $P$  ne peut donc pas être résolu de la façon habituelle, i.e. en tenant compte des trois vertex interférentiels dominants. Il faut noter que, pour les solides désordonnés, cette méthode de résolution impliquant des vertex est intimement liée à la nature Hermitienne du problème. Dans le cas du Kicked Rotor, le problème est décrit par un opérateur  $U$  unitaire. C'est ce qui conduit à l'équation (A-64) sur les corrélations du potentiel.

Une autre approche au problème de normalisation est d'écrire une identité de Ward qui exprime la conservation de l'énergie (correspondant à la normalisation de  $P$ ). Généralement, i.e. dans le cas des systèmes désordonnés usuels, cette identité relie la fonction de Green moyennée sur le désordre avec la self-énergie [44]. Ici, nous avons une expression analytique pour l'équivalent de la fonction de Green moyennée sur le désordre, mais nous n'avons pas de self-énergie ; en particulier, on ne peut pas définir de diagrammes caractérisant une self-énergie. Ainsi, l'approche usuelle ne marche pas, même pour ce qui est de l'identité de Ward.

Le problème de la normalisation de  $P$  (identité de Ward) dans le cas du Kicked Rotor est non-trivial [131] et dépasse le cadre de cette partie introductive à la méthode diagrammatique dans le Kicked Rotor. La discussion précédente visait seulement à mettre en lumière les différences du Kicked Rotor avec les systèmes désordonnés usuels. Nous donnerons ici la forme "exacte" du vertex interférentiel qu'il faut considérer [104]. Nous avons vu [voir Eq. (A-51)] que le vertex interférentiel associé au Cooperon s'écrivait dans l'espace réciproque [45] :

$$H^{(A)}(\varphi, \varphi_0, -\varphi, \varphi'_0) = \tilde{P}_0(\varphi_0, \varphi, \omega) \tilde{P}_0(\varphi'_0, \varphi, \omega) . \quad (\text{A-66})$$

Le vertex interférentiel permettant l'association de Diffusons entre eux (voir Fig. 9.7) et vérifiant la condition de normalisation de  $P$  s'écrit sous la forme [104] :

$$\boxed{\mathcal{H}(\varphi, \varphi_0, -\varphi, \varphi'_0) = [\tilde{P}_0(\varphi_0, \varphi, \omega) - 1] \times [\tilde{P}_0(\varphi'_0, \varphi, \omega) - 1]} . \quad (\text{A-67})$$

Dans la suite, nous le noterons :

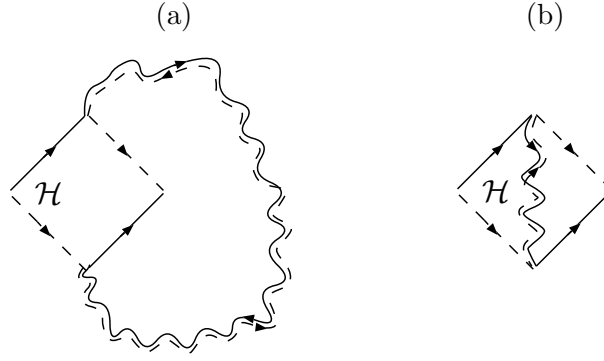
$$\mathcal{H} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \mathcal{H} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} , \quad (\text{A-68})$$

où  $\mathcal{H}$  réfère à Hikami.

#### A.4.2 Boucle de Hikami

Calculons, dans la limite diffusive, l'équivalent du Cooperon, mais incluant le vertex interférentiel  $\mathcal{H}$  au lieu du simple vertex  $H^{(A)}$  (voir Fig. 9.9). Nous dénommons cette contribution "boucle de Hikami" et la notons  $P_{\mathcal{H}}$ . Le point de départ est similaire à celui du Cooperon :

$$P_{\mathcal{H}}(\varphi, \omega) = \int \frac{d\varphi_0}{2\pi} \frac{d\varphi'_0}{2\pi} \mathcal{H}(\varphi, \varphi_0, -\varphi, \varphi'_0) \Gamma_{\omega}^C(\varphi_0 + \varphi'_0) . \quad (\text{A-69})$$



**Fig. 9.9:** (a) et (b) : Représentations équivalentes d'une boucle de Hikami faisant apparaître le vertex interférentiel  $\mathcal{H}$ .

Le vertex interférentiel  $\mathcal{H}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\varphi, \varphi_0, -\varphi, \varphi'_0) &= \left[ \tilde{P}_0(\varphi_0, \varphi, \omega) - 1 \right] \times \left[ \tilde{P}_0(\varphi'_0, \varphi, \omega) - 1 \right] \\ &= e^{i2\omega} \times \left\{ \exp \left[ i2k \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi_0 \right] - 1 \right\} \\ &\quad \times \left\{ \exp \left[ i2k \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi'_0 \right] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A-70})$$

Dans les limites de faible désordre  $k \gg 1$  et diffusive,  $k\varphi \ll 1$  et  $\omega \ll 1$ , le vertex  $\mathcal{H}$  prend la forme approximative :

$$\mathcal{H}(\varphi, \varphi_0, -\varphi, \varphi'_0) \approx -k^2 \varphi^2 \sin \varphi_0 \sin \varphi'_0. \quad (\text{A-71})$$

Par conséquent, la boucle de Hikami  $P_{\mathcal{H}}$  s'écrit :

$$P_{\mathcal{H}}(\varphi, \omega) \approx -k^2 \varphi^2 \int \frac{d\varphi_0}{2\pi} \frac{d\varphi'_0}{2\pi} \sin \varphi_0 \sin \varphi'_0 \Gamma_{\omega}^C(\varphi_0 + \varphi'_0). \quad (\text{A-72})$$

Du fait du pôle diffusif dans  $\Gamma^C$ , la contribution principale à l'intégrale précédente est centrée en des valeurs de  $\varphi_0$  et  $\varphi'_0$  opposées,  $|\varphi_0 + \varphi'_0| \ll 1$ , i.e. telles que :

$$\sin \varphi'_0 \approx -\sin \varphi_0. \quad (\text{A-73})$$

On peut procéder au changement de variable  $(\varphi_0, \varphi'_0) \rightarrow (\varphi_0, \Phi = \varphi_0 + \varphi'_0)$  et intégrer sur la variable  $\varphi_0$  :

$$\int \frac{d\varphi_0}{2\pi} \sin^2 \varphi_0 = \frac{1}{2}, \quad (\text{A-74})$$

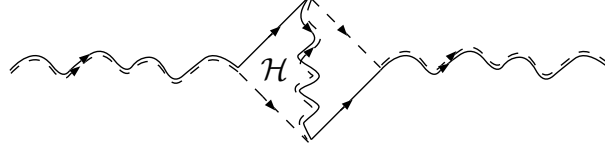
pour ainsi obtenir :

$$P_{\mathcal{H}}(\varphi, \omega) \approx \frac{k^2 \varphi^2}{2} \int \frac{d\Phi}{2\pi} \Gamma_{\omega}^C(\Phi). \quad (\text{A-75})$$

Conclusion, dans les limites de faible désordre et diffusive, la boucle de Hikami revêt la forme :

$$P_{\mathcal{H}}(\varphi, \omega) \approx 2D\varphi^2 \int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + D\Phi^2}. \quad (\text{A-76})$$

La contribution  $P_{\mathcal{H}}$  s'annule en  $\varphi = 0$ . Tenir compte de ce processus quantique ne brise donc pas la normalisation de  $P = P_D + P_{\mathcal{H}}$ .



**Fig. 9.10:** Contribution à la probabilité  $P$  d'un processus de transport incorporant une boucle de Hikami  $P_D P_H P_D$ .

#### A.4.3 Correction quantique à la diffusion classique

La boucle de Hikami que nous avons décrite est l'élément essentiel conduisant à une correction quantique à la diffusion classique décrite par le Diffuson. Nous n'avons jusqu'à présent considéré que  $P_H$ , i.e. une simple boucle. Nous pourrions bien sûr insérer une boucle de Hikami entre deux séquences de Diffuson, c'est-à-dire considérer  $P_D P_H P_D$ , comme en figure 9.10. Ceci permet de prendre en compte toutes les séquences qui débutent par deux trajectoires apariées, puis forment une boucle avec les trajectoires contre-propageantes, et enfin terminent par les trajectoires apariées, comme celle représentée en figure 9.1. Il faut noter que dans le terme  $P_D P_H P_D$  est incluse entre autres la simple boucle  $P_H$  [voir équation (A-22) pour  $P_D$ ]. Nous pourrions également insérer deux boucles de Hikami, ou trois, ou ... Tenir compte de toutes ces possibles contributions consiste à écrire la probabilité  $P$  comme la somme :

$$\begin{aligned}
 P(\varphi, \omega) = & P_D(\varphi, \omega) \\
 & + P_D(\varphi, \omega) P_H(\varphi, \omega) P_D(\varphi, \omega) \\
 & + P_D(\varphi, \omega) P_H(\varphi, \omega) P_D(\varphi, \omega) P_H(\varphi, \omega) P_D(\varphi, \omega) \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{A-77}$$

soit :

$$P(\varphi, \omega) = \frac{P_D(\varphi, \omega)}{1 - P_D(\varphi, \omega) P_H(\varphi, \omega)}. \tag{A-78}$$

Par conséquent, dans les limites de faible désordre  $k \gg 1$  et diffusive  $k\varphi \ll 1$ ,  $\omega \ll 1$ , la probabilité de transport quantique  $P$  revêt une forme diffusive :

$$P(\varphi, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\varphi^2}, \tag{A-79}$$

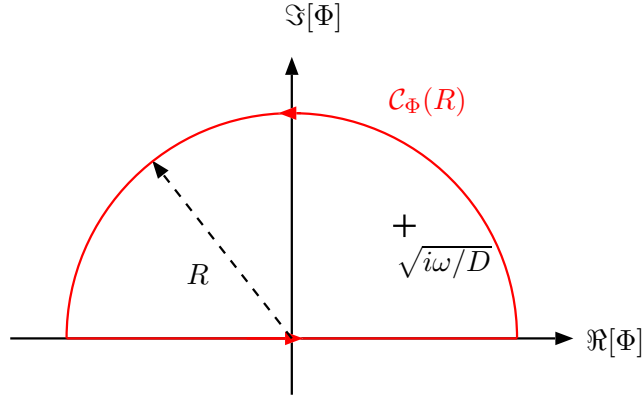
où la constante de Diffusion  $D(\omega)$  est celle classique corrigée des effets quantiques :

$$D(\omega) = D \left( 1 - 2 \int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + D\Phi^2} \right). \tag{A-80}$$

$D(\omega) < D$  : les effets interférentiels ont tendance à restreindre la diffusion classique. On parle de localisation dynamique faible.

#### A.4.4 Localisation dynamique faible

Nous pouvons, grâce au formalisme diagrammatique précédemment introduit, décrire le régime de localisation dynamique faible  $1 \ll t \ll t_\ell$ . Mais nous ne pouvons aller plus



**Fig. 9.11:** Contour d'intégration  $\mathcal{C}_\Phi(R)$  (en rouge) pour le calcul de l'intégrale Eq. (A-81).

loin en temps avec cette approche perturbative. Ceci peut se comprendre en considérant le comportement de la correction quantique à la constante de Diffusion classique  $D$  en fonction de  $\omega$  :  $D(\omega)/D - 1$ . L'équation pour la constante de diffusion renormalisée des corrections quantiques  $D(\omega)$  se résout facilement au moyen du théorème des résidus. En effet :

$$\int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{\Phi^2 - i\omega/D} = \int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{i\omega/D}} \left( \frac{1}{\Phi - \sqrt{i\omega/D}} - \frac{1}{\Phi + \sqrt{i\omega/D}} \right), \quad (\text{A-81})$$

et l'on peut choisir un contour d'intégration  $\mathcal{C}_\Phi(R)$  comme indiqué dans la Fig. 9.11. On obtient, en prenant la limite  $R \rightarrow \infty$  :

$$\int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{\Phi^2 - i\omega/D} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{iD}{\omega}}. \quad (\text{A-82})$$

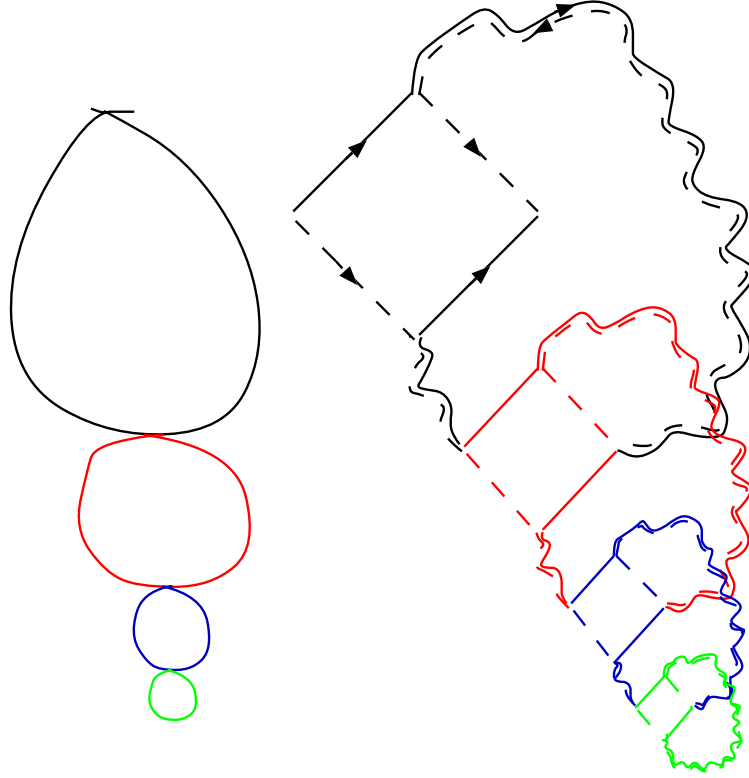
Ainsi,  $D(\omega)$  vérifie :

$$D(\omega) = D - \sqrt{\frac{iD}{\omega}}, \quad (\text{A-83})$$

et la correction quantique diverge lorsque  $\omega \rightarrow 0$  :

$$\boxed{\frac{D(\omega)}{D} - 1 = -\frac{2}{k} \sqrt{\frac{i}{\omega}}}. \quad (\text{A-84})$$

L'approche perturbative que nous avons mise en oeuvre ne convient donc que pour les fréquences telles que :  $4/k^2 \ll \omega \ll 1$ . C'est le domaine de validité de la localisation dynamique faible :  $1 \ll t \ll t_\ell$  ( $t_\ell \approx k^2/4$ ).



**Fig. 9.12:** Boucles de Hikami imbriquées les unes dans les autres à la manière de poupées russes.

## B Théorie auto-cohérente du régime de localisation dynamique forte

La méthode perturbative décrite précédemment devient caduque dans le régime de localisation forte  $t \gg t_\ell$ . En toute rigueur, il faudrait tenir compte dans ce régime de tous les processus de transport, i.e. du Diffuson, de la boucle de Hikami, mais aussi de processus regroupant des couples de trajectoires formant des noeuds complexes tels que celui représenté en figure 9.2. Une autre méthode, auto-cohérente, peut être envisagée [44] qui permet d'aller au-delà de l'approche perturbative. C'est cette théorie que nous allons décrire ici.

### B.1 Équation auto-cohérente pour $D(\omega)$

Dans l'approche auto-cohérente, l'on cherche une expression pour  $D(\omega)$  sous la forme :

$$D(\omega) = \mathcal{F}[D(\omega)] , \quad (\text{B-1})$$

où la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  dépend de  $D(\omega)$ . La solution auto-cohérente de l'équation précédente  $D(\omega)$  devrait être valable quelles que soient les valeurs de  $\omega$  et du désordre  $k$ . Bien sûr, pour que cette solution soit plausible, il faut qu'elle soit compatible avec les cas limites connus, i.e. elle doit être identique à  $D(\omega)$  trouvé par la méthode perturbative dans le régime  $4/k^2 \ll \omega \ll 1$ , Eq. (A-80). L'auto-cohérence permet alors d'étendre le domaine de validité de la théorie au-delà de celui de la théorie perturbative.

Considérons une boucle de Hikami telle que représentée en figure 9.9. Nous pourrions habiller cette boucle d'autres boucles comme par exemple en figure 9.12. Tenir compte de toutes les possibles imbrications de boucles revient à ce que  $P_{\mathcal{H}}$  dépende de  $D(\omega)$  et non plus de  $D$ . En effet, la dépendance de la boucle de Hikami en  $D$  suppose implicitement que le processus de diffusion dans la boucle (représenté par les lignes pleine et tiretée ondulantes) se fait avec la constante de diffusion  $D$ . Or lorsque  $D(\omega)$  est très différent de  $D$ , ceci n'est pas vrai, la diffusion dans la boucle se fait à  $D(\omega)$ . Ainsi, dans la théorie auto-cohérente,  $P_{\mathcal{H}}$  s'écrit :

$$P_{\mathcal{H}}(\varphi, \omega) \approx 2D(\omega)\varphi^2 \int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\Phi^2}. \quad (\text{B-2})$$

Comme précédemment, nous écrivons la probabilité totale comme somme de contributions du type  $P_D P_{\mathcal{H}} P_D$  en prenant garde au fait que seul  $P_{\mathcal{H}}$  dépend de  $D(\omega)$  et non pas  $P_D$ . Mettre  $D(\omega)$  à la place de  $D$  dans le Diffuson reviendrait en effet à dire

$$P_D = \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\varphi^2} = P, \quad (\text{B-3})$$

ce qui est absurde puisque  $P = P_D + P_D P_{\mathcal{H}} P_D + \dots$

La probabilité totale s'écrit :

$$\begin{aligned} P(\varphi, \omega) &= \frac{P_D(\varphi, \omega)}{1 - P_{\mathcal{H}}(\varphi, \omega)P_D(\varphi, \omega)} \\ &= \frac{1}{-i\omega + D\varphi^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{-i\omega + D\varphi^2} 2D(\omega)\varphi^2 \int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\Phi^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

Où l'on voit ainsi que le coefficient de Diffusion  $D(\omega)$  apparaissant dans :

$$P(\varphi, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\varphi^2}, \quad (\text{B-5})$$

vérifie l'équation auto-cohérente :

$$\boxed{D(\omega) = D - 2D(\omega) \int \frac{d\Phi}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\Phi^2}}. \quad (\text{B-6})$$

## B.2 Solution de l'équation auto-cohérente pour le Kicked Rotor

Dans le régime localisé où  $D(\omega) \sim -i\omega$ , la probabilité de diffusion quantique  $P(\varphi, \omega)$  prend la forme :

$$\boxed{\lim_{\omega \rightarrow 0} P(\varphi, \omega) = \frac{1}{-i\omega} \frac{1}{1 + (\varphi\ell)^2}}, \quad (\text{B-7})$$

décrivant une localisation exponentielle, où la longueur de localisation  $\ell$  est donnée par :

$$\boxed{\ell = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}}. \quad (\text{B-8})$$



L'expression de  $\ell$  peut être obtenue via l'équation auto-cohérente pour  $D(\omega)$  :

$$\frac{D(\omega)}{D} = 1 - \frac{1}{\pi D} \int d\Phi \frac{1}{1 + \Phi^2 \frac{D(\omega)}{-i\omega}} \frac{D(\omega)}{-i\omega}. \quad (\text{B-9})$$

Procédant au changement de variable  $\Phi \rightarrow y = \Phi \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{D(\omega)}{D} &= 1 - \frac{1}{\pi D} \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{1 + y^2} \\ &= 1 - \frac{1}{D} \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}. \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

À la limite  $\omega \rightarrow 0$ ,  $D(\omega)/D \rightarrow 0$ . Ainsi, dans la théorie auto-cohérente, l'expression de la longueur de localisation  $\ell$  est :

$$\boxed{\ell = D}. \quad (\text{B-11})$$

Cette expression est identique à celle trouvée en faisant correspondre le Kicked Rotor à un modèle de Loyd [92] :  $p_\ell = k\ell = D_{cl}/k \approx K^2/4k$  (voir section B.3 du chapitre 3).

### B.3 Théorie auto-cohérente de la transition d'Anderson avec le Kicked Rotor 3D périodique

L'approche diagrammatique pour décrire le Kicked Rotor doit pouvoir se généraliser à un Kicked Rotor de dimension  $d > 1$  tel que le Kicked Rotor 3D suivant (voir section A.1 du chapitre 5) :

$$\boxed{\hat{H}_3 = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \omega_2 \frac{\hat{p}_2^2}{2} + \omega_3 \frac{\hat{p}_3^2}{2} + K \left[ \cos \hat{\theta}_1 \cos \hat{\theta}_2 \cos \hat{\theta}_3 \right] \sum_n \delta(t - n)}, \quad (\text{B-12})$$

où le quadruplet  $(k, \omega_2, \omega_3, \pi)$  est constitué de nombres incommensurables entre eux. Néanmoins, une telle généralisation n'a pas été démontrée de façon explicite.

Suivant la théorie diagrammatique des systèmes désordonnés [44, 45], nous supposons que la probabilité de diffusion quantique  $P$  :

$$P(\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_f, t = N) = |\langle \mathbf{l}_f | \hat{U}^N | \mathbf{l}_i \rangle|^2, \quad (\text{B-13})$$

peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{P(\boldsymbol{\varphi}, \omega) = \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\boldsymbol{\varphi}^2}}, \quad (\text{B-14})$$

où la constante de Diffusion dépendant de la fréquence  $\omega$  vérifie l'équation auto-cohérente :

$$\boxed{D(\omega) = D - 2D(\omega) \int \frac{d^d \boldsymbol{\Phi}}{(2\pi)^d} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\boldsymbol{\Phi}^2}}. \quad (\text{B-15})$$

Dans l'équation précédente,  $D$  dénote le coefficient de diffusion classique tel que  $\langle \mathbf{l}^2 \rangle = 2dDt$  dans le régime classique et chaotique [voir Eq. (A-32)]. En partant de l'Application

Standard (3.11) généralisée à  $d$  dimensions, et en supposant que les kicks sont complètement décorrélés entre eux, on trouve :  $D = k^2/4d$ .

L'équation auto-cohérente pour  $D(\omega)$ , Eq. (B-15), est le point de départ de notre nouvelle analyse de la transition d'Anderson avec le Kicked Rotor 3D (B-12) (dans la suite nous nous plaçons en dimension trois). Nous allons voir que l'équation (B-15) permet de rendre compte de façon approchée de la transition métal-isolant observée. Dans la prochaine section, nous déduirons du comportement de  $D(\omega)$  à la transition la dynamique de la fonction d'onde critique.

### B.3.1 Equation auto-cohérente en dimension trois

L'intégrale sur  $\Phi$  apparaissant dans l'équation auto-cohérente (en dimension  $d = 3$ ) :

$$\int \frac{d^3\Phi}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\omega + D(\omega)\Phi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{1/k} d\Phi \frac{\Phi^2}{-i\omega + D(\omega)\Phi^2}, \quad (\text{B-16})$$

est restreinte à des valeurs de  $\Phi = |\Phi|$  inférieures à  $1/k$  (régime hydrodynamique), sans quoi elle n'est pas définie. Procédant au changement de variable  $\Phi \rightarrow y = \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}\Phi$  et notant  $\tilde{\ell}(\omega) = \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}}\frac{1}{k}$ , on peut réécrire l'équation auto-cohérente sous la forme :

$$\frac{D(\omega)}{D} = 1 - \frac{1}{\pi^2 D k} \frac{1}{\tilde{\ell}(\omega)} \int_0^{\tilde{\ell}(\omega)} dy \frac{y^2}{1+y^2}. \quad (\text{B-17})$$

Utilisant l'identité :

$$\frac{y^2}{1+y^2} = 1 - \frac{1}{1+y^2}, \quad (\text{B-18})$$

et le fait que  $D = \frac{k^2}{4d} = \frac{k^2}{12}$  en dimension  $d = 3$ , on obtient :

$$\boxed{\frac{D(\omega)}{D} = 1 - \frac{12}{\pi^2} \frac{1}{k^3} \left( 1 + \frac{1}{\tilde{\ell}(\omega)} \int_0^{\tilde{\ell}(\omega)} dy \frac{1}{1+y^2} \right)}. \quad (\text{B-19})$$

### B.3.2 Désordre critique $k_c$

Approchons la transition du côté diffusif  $k > k_c$ . Dans ce régime, il existe une solution  $D(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} D(\omega) \neq 0$ , et  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{\ell}(\omega) = \infty$ . Si bien que :

$$\frac{1}{\tilde{\ell}(\omega)} \int_0^{\tilde{\ell}(\omega)} dy \frac{1}{1+y^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0, \quad (\text{B-20})$$

et :

$$\frac{D(0)}{D} = 1 - \frac{12}{\pi^2} \frac{1}{k^3}. \quad (\text{B-21})$$

Au seuil critique, i.e. à  $k = k_c$ , on a  $D(0)/D = 0$ . Ainsi, le désordre critique est tel que :

$$1 = \frac{12}{\pi^2} \frac{1}{k_c^3}, \quad (\text{B-22})$$

soit encore :

$$\boxed{k_c \simeq \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^{1/3} \approx 1} . \quad (\text{B-23})$$

Ceci correspond au critère de Ioffe-Regel [56]. Cette valeur de  $k_c$  est à comparer à celle obtenue à partir de simulations numériques du Kicked Rotor 3D  $k_c \approx 2.4$  [117].

### B.3.3 Exposant critique $s$ associé à la constante de diffusion $D(0)$

Au voisinage de la transition du côté diffusif,  $0 < (k - k_c)/k_c \ll 1$ , la constante de diffusion  $D(0)$  vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{D(0)}{D} &= 1 - \left(\frac{k}{k_c}\right)^{-3} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{k - k_c}{k_c}\right)^{-3} \\ &\approx \frac{3}{k_c}(k - k_c) , \end{aligned} \quad (\text{B-24})$$

Ainsi, la constante de diffusion  $D(0)$  s'annule en  $k_c$  suivant la loi algébrique :

$$\boxed{D(0) \sim (k - k_c)^s} . \quad (\text{B-25})$$

où l'exposant critique  $s$  est :

$$\boxed{s = 1} . \quad (\text{B-26})$$

$s$  est également associé à la divergence de la longueur de corrélation  $\xi \sim 1/D(0)$ .

### B.3.4 Exposant critique $\nu$ associé à la longueur de localisation

Au voisinage de la transition du côté localisé,  $0 < (k_c - k)/k_c \ll 1$ , la longueur de localisation est grande,  $\ell = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sqrt{\frac{D(\omega)}{-i\omega}} \gg k$ , et l'on peut faire l'approximation :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\bar{\ell}(\omega)} \int_0^{\bar{\ell}(\omega)} dy \frac{1}{1 + y^2} \right) \approx \frac{k}{\ell} \frac{\pi}{2} , \quad (\text{B-27})$$

au premier ordre en  $k/\ell \ll 1$ .

Également, étant dans le régime localisé, la constante de diffusion  $D(0)$  est nulle, et ainsi :

$$1 \approx \left(\frac{k}{k_c}\right)^{-3} \left(1 - \frac{k}{\ell} \frac{\pi}{2}\right) , \quad (\text{B-28})$$

soit encore :

$$\left[ \left(\frac{k}{k_c}\right)^3 - 1 \right] \approx -\frac{k}{\ell} \frac{\pi}{2} . \quad (\text{B-29})$$

Or :

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{k_c}\right)^3 &\approx \left(1 - \frac{k_c - k}{k_c}\right) \\ &\approx 1 - 3 \frac{k_c - k}{k_c} , \end{aligned} \quad (\text{B-30})$$

si bien que :

$$\begin{aligned}\ell &\approx \frac{k k_c}{k_c - k} \frac{\pi}{6} \\ &\approx \frac{k_c^2}{k_c - k} \frac{\pi}{6}.\end{aligned}\tag{B-31}$$

Ainsi, la longueur de localisation  $\ell$  diverge à la transition suivant la loi algébrique :

$$\boxed{\ell \sim (k_c - k)^{-\nu}},\tag{B-32}$$

où l'exposant critique  $\nu$  est :

$$\boxed{\nu = 1}.\tag{B-33}$$

Les exposants critiques  $\nu$  et  $s$  sont tels que  $\nu = s$  et donc vérifient la loi de Wegner  $s = \nu(d - 2)$  en dimension trois [6]. La valeur prédite par la théorie auto-cohérente [44]  $\nu = s = 1$  diffère notablement de celles obtenues à partir de simulations numériques du Kicked Rotor quasi-périodique  $\nu = 1.59 \pm 0.01$  [120] (voir section E du chapitre 5), du Kicked Rotor 3D [117]  $\nu = 1.6 \pm 0.2$ , valeurs numériques identiques à celle mesurée à partir du modèle d'Anderson 3D,  $\nu = 1.57 \pm 0.02$  [12]. La théorie auto-cohérente peut être vue comme une théorie de champ moyen. De ce point de vue, il n'est pas très étonnant qu'elle ne donne pas les bons exposants critiques.



---

# Bibliographie

---

- [1] F. Bloch, *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, Z. Phys. 52 (1928), pp. 555–600.
- [2] C. Zener, *A Theory of Electrical Breakdown of Solid Dielectrics*, Proc. R. Soc. A 145 (1934), p. 523.
- [3] P.W. Anderson, *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*, Phys. Rev. 109 (1958), pp. 1492–1505.
- [4] D.J. Thouless, *Electrons in disordered systems and the theory of localization*, Phys. Rep. 13 (1974), p. 93.
- [5] J.T. Edwards and D.J. Thouless, *Numerical studies of localization in disordered systems*, J. Phys. C 5 (1972), pp. 807–840.
- [6] F. Wegner, *Electrons in Disordered Systems. Scaling near the Mobility Edge*, Z. Phys. B25 (1976), p. 327.
- [7] R. Landauer, *Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices*, Phil. Mag. 21 (1970), pp. 863–867.
- [8] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello, and T.V. Ramakrishnan, *Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. 42 (1979), pp. 673–676.
- [9] A. MacKinnon and B. Kramer, *One-Parameter Scaling of Localization Length and Conductance in Disordered Systems*, Phys. Rev. Lett. 47 (1981), pp. 1546–1549.
- [10] J.L. Pichard and G. Sarma, *Finite size scaling approach to Anderson localisation*, J. Phys. C 14 (1981), pp. L127–L132.
- [11] A. Mackinnon, *Critical exponents for the metal-insulator transition*, J. Phys. C 6 (1994), pp. 2511–2518.
- [12] K. Slevin and T. Ohtsuki, *Corrections to Scaling at the Anderson Transition*, Phys. Rev. Lett. 82 (1999), pp. 382–385.
- [13] D. Vollhardt and P. Wölfle, *Scaling Equations from a Self-Consistent Theory of Anderson Localization*, Phys. Rev. Lett. 48 (1982), pp. 699–702.
- [14] G. Bergmann, *Weak localization in thin films a time-of-flight experiment with conduction electrons*, Phys. Rep. 107 (1984), pp. 1–58.
- [15] P.A. Lee and T.V. Ramakrishnan, *Disordered electronic systems*, Rev. Mod. Phys. 57 (1985), pp. 287–337.

- [16] D. Belitz and T.R. Kirkpatrick, *The Anderson-Mott transition*, Rev. Mod. Phys. 66 (1994), pp. 261–380.
- [17] D.M. Basko, I.L. Aleiner, and B.L. Altshuler, *Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states*, Ann. Phys. 321 (2006), pp. 1126–1205.
- [18] M. Janssen, *Statistics and scaling in disordered mesoscopic electron systems*, Phys. Rep. 295 (1998), pp. 1–91.
- [19] D. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, *Localization of light in a disordered medium*, Nature 390 (1997), pp. 671–673.
- [20] M. Störzer, P. Gross, G.M. Aegerter, and G. Maret, *Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light*, Phys. Rev. Lett. 96 (2006), p. 063904.
- [21] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and B. Segev, *Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices*, Nature 446 (2007), pp. 52–55.
- [22] C.A. Condat and T.R. Kirkpatrick, *Resonant scattering and Anderson localization of acoustic waves*, Phys. Rev. B 36 (1987), pp. 6782–6793.
- [23] I.S. Graham, L. Piché, and M. Grant, *Experimental evidence for localization of acoustic waves in three dimensions*, Phys. Rev. Lett. 64 (1990), pp. 3135–3138.
- [24] H. Hu, A. Strybulevych, J.H. Page, S.E. Skipetrov, and B.A. van Tiggelen, *Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network*, Nature Physics 4 (2008), pp. 945–948.
- [25] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, and B. Damski, *Ultracold atomic gases in optical lattices : mimicking condensed matter physics and beyond*, Advances in Physics 56 (2007), pp. 243–379.
- [26] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Many-body physics with ultracold gases*, Rev. Mod. Phys. 80 (2008), p. 885.
- [27] M. Greiner, O. Mandel, T. Rom, A. Altmeyer, A. Widera, T. Hänsch, and I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in an ultracold gas of atoms*, Physica B 329 (2003), pp. 11–12.
- [28] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, *Direct observation of Anderson localization of matter-waves in a controlled disorder*, Nature 453 (2008), pp. 891–894.
- [29] R. Kuhn, O. Sigwarth, C. Miniatura, D. Delande, and C.A. Müller, *Coherent Matter Wave Transport in Speckle Potentials*, New J. Phys. 9 (2007), p. 161.
- [30] O. Bohigas, M.J. Giannoni, and C. Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett. 52 (1984), pp. 1–4.
- [31] B.V. Chirikov, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Phys. Rep. 52 (1979), pp. 263 – 379.
- [32] A. Altland and M.R. Zirnbauer, *Field Theory of the Quantum Kicked Rotor*, Phys. Rev. Lett. 77 (1996), pp. 4536–4539.
- [33] F.M. Izrailev, *Simple models of quantum chaos : Spectrum and eigenfunctions*, Phys. Rep. 196 (1990), pp. 299 – 392.

- [34] F.L. Moore, J.C. Robinson, C.F. Bharucha, B. Sundaram, and M.G. Raizen, *Atom optics realization of the quantum  $\delta$ -kicked rotator*, Phys. Rev. Lett. 75 (1995), pp. 4598–4601.
- [35] G. Casati, I. Guarneri, and D.L. Shepelyansky, *Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurable frequencies*, Phys. Rev. Lett. 62 (1989), pp. 345–348.
- [36] D.M. Basko, M.A. Skvortsov, and V.E. Kravtsov, *Dynamic Localization in Quantum Dots : Analytical Theory*, Phys. Rev. Lett. 90 (2003), p. 096801.
- [37] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J.C. Garreau, *Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves*, Phys. Rev. Lett. 101 (2008), p. 255702.
- [38] K. Slevin and T. Ohtsuki, *The Anderson Transition : Time Reversal Symmetry and Universality*, Phys. Rev. Lett. 78 (1997), pp. 4083–4086.
- [39] F. Milde, R. Römer, M. Schreiber, and V. Uski, *Critical properties of the metal-insulator transition in anisotropic systems*, Eur. Phys. J. B 15 (2000), pp. 685–690.
- [40] F. Evers and A.D. Mirlin, *Anderson transitions*, Rev. Mod. Phys. 80 (2008), 1355, p. 1355.
- [41] J.T. Chalker, *Scaling and eigenfunction correlations near a mobility edge*, Physica A 167 (1990), pp. 253–258.
- [42] T. Brandes, B. Huckestein, and L. Schweitzer, *Critical dynamics and multifractal exponents at the Anderson transition in 3d disordered systems*, Ann. Phys. 5 (1996), p. 633.
- [43] T. Ohtsuki and T. Kawarabayashi, *Anomalous Diffusion at the Anderson Transitions*, J. Phys. Soc. Jpn. 66 (1997), pp. 314–317.
- [44] D. Vollhardt and P. Wölfle, *Self-Consistent Theory of Anderson Localization*, W. Hanke and K.Y. V., eds., Elsevier, Amsterdam, 1992, pp. 1–78.
- [45] E. Akkermans, and G. Montambaux, *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [46] B. Kramer and A. MacKinnon, *Localization : theory and experiment*, Rep. Prog. Phys. 56 (1993), pp. 1469–1564.
- [47] Y. Niimi, H. Kambara, T. Matsui, D. Yoshioka, and H. Fukuyama, *Real-Space Imaging of Alternate Localization and Extension of Quasi-Two-Dimensional Electronic States at Graphite Surfaces in Magnetic Fields*, Phys. Rev. Lett. 97 (2006), p. 236804.
- [48] D.L. Shepelyansky, *Localization of diffusive excitation in multi-level systems*, Physica D 28 (1987), pp. 103–114.
- [49] F. Germinet and A. Klein, *A characterization of the Anderson metal-insulator transport transition*, Duke Mathematical Journal 124 (2004), pp. 309–350.
- [50] J.M. Luck, *Systèmes désordonnés unidimensionnels*, Commissariat à l'énergie atomique, 1992.
- [51] V.I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Moscow Math. Soc. 619 (1968), p. 197.



- [52] H. Furstenberg, *Noncommuting random products*, Transactions of the American Mathematical Society (1963), pp. 377–428.
- [53] K. Ishii, *Localization of eigenstates and transport phenomena in one-dimensional disordered systems*, Progress Theor. Phys. Suppl 53 (1973), pp. 77–118.
- [54] J.L. Pichard, *Contribution à une théorie quantique des phénomènes de transport par études numériques de systèmes désordonnés : localisation d'Anderson*, Thèse de doctorat d'État de l'université de Paris Orsay, Orsay, France, 1984.
- [55] J.L. Pichard, *The one-dimensional Anderson model : scaling and resonances revisited*, J. Phys. C 19 (1986), pp. 1519–1535.
- [56] A.F. Ioffe and A.R. Regel, *Non-crystalline, amorphous and liquid electronic semiconductors*, Prog. Semicond. 4 (1960), p. 237.
- [57] K.B. Efetov, *Supersymmetry and theory of disordered metals*, Advances in Physics 32 (1983), pp. 53–127.
- [58] M.E. Fisher and M.N. Barber, *Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region*, Phys. Rev. Lett. 28 (1972), pp. 1516–1519.
- [59] A. MacKinnon and B. Kramer, *The Scaling Theory of Electrons in Disordered Solids : Additional Numerical Results*, Z. Phys. B 53 (1983), pp. 1–13.
- [60] K. Slevin, P. Markoš, and T. Ohtsuki, *Scaling of the conductance distribution near the Anderson transition*, Phys. Rev. B 67 (2003), p. 155106.
- [61] K.v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. 45 (1980), pp. 494–497.
- [62] H.P. Wei, D.C. Tsui, M.A. Paalanen, and A.M.M. Pruisken, *Experiments on Delocalization and Universality in the Integral Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. 61 (1988), pp. 1294–1296.
- [63] A.M.M. Pruisken, *Universal Singularities in the Integral Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. 61 (1988), pp. 1297–1300.
- [64] S.B. Field and T.F. Rosenbaum, *Critical behavior of the Hall conductivity at the metal-insulator transition*, Phys. Rev. Lett. 55 (1985), pp. 522–524.
- [65] M.A. Paalanen, T.F. Rosenbaum, T.G. A., and R.N. Bhatt, Phys. Rev. Lett. 48 (1982), p. 1284.
- [66] H. Stupp, M. Hornung, M. Larkner, O. Madel, and H.v. Löhneysen, Phys. Rev. Lett. 72 (1994), p. 2122.
- [67] S.C. Waffenschmidt, C. Pfleiderer, and Löhneysen, Phys. Rev. Lett. 83 (1999), p. 3005.
- [68] M.P. Albadavan and A. Lagendijk, *Observation of weak localization of light in a random medium*, Phys. Rev. Lett. 55 (1985), p. 2692.
- [69] P. Wolf and G. Maret, *Weak Localization and Coherent Backscattering of Photons in Disordered Media*, Phys. Rev. Lett. 55 (1985), p. 2696.
- [70] G. Labeyrie, F. Tomaside, J.C. Bernard, C.A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser, *Coherent Backscattering of Light by Cold Atoms*, Phys. Rev. Lett. 83 (1999), pp. 5266–5269.

- [71] M.B. Hastings, A.D. Stone, and H.U. Baranger, *Inequivalence of weak localization and coherent backscattering*, Phys. Rev. B 50 (1994), pp. 8230–8244.
- [72] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweer, and G. Maret, *Localization or classical diffusion of light ?*, Nature 398 (1999), pp. 206–207.
- [73] C.M. Aegerter, M. Störzer, and G. Maret, *Experimental determination of critical exponents in Anderson localization of light*, Europhys. Lett. 75 (2006), p. 562.
- [74] H. De Raedt, A. Lagendijk, and P. Vriesde, *Transverse Localization of Light*, Phys. Rev. Lett. 62 (1989), pp. 47–50.
- [75] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, *Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices*, Nature 446 (2007), pp. 52–55.
- [76] S. Faez, S. A., J.H. Page, A. Lagendijk, and B.A. van Tiggelen, *Observation of multifractality at the Anderson localization transition of ultrasound in open three-dimensional media*, arXiv : 0906.1173 (2009).
- [77] M. Greiner, O. Mandel, T. Hänsch, and I. Bloch, *Collapse and revival of the matter wave field of a Bose–Einstein condensate*, Nature 419 (2002), pp. 51–54.
- [78] G. Casati, I. Guarneri, and D.L. Shepelyansky, *Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurable frequencies*, Phys. Rev. Lett. 62 (1989), pp. 345–348.
- [79] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Processus d’interaction entre photons et atomes*, InterEditions, 1988.
- [80] G. Casati, B.V. Chirikov, J. Ford, and F.M. Izrailev, *Stochastic Behavior of Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, G. Casati and J. Ford, eds., Springer, New York, 1979, p. 334.
- [81] A.L. Lichtenberg, and M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [82] A.B. Rechester and R.B. White, *Calculation of Turbulent Diffusion for the Chirikov-Taylor Model*, Phys. Rev. Lett. 44 (1980), pp. 1586–1589.
- [83] S. Fishman, D.R. Grempel, and R.E. Prange, *Chaos, quantum recurrences, and Anderson localization*, Phys. Rev. Lett. 49 (1982), pp. 509–512.
- [84] A. Joye, *Density of States and Thouless formula for Random Unitary Band Matrices*, Ann. Henri Poincaré 5 (2004), pp. 347–379.
- [85] E. Hanza, A. Joye, and G. Stolz, *Localization for random unitary operators*, Lett. Math. Phys. 75 (2006), pp. 255–272.
- [86] E. Hanza, A. Joye, and G. Stolz, *Dynamical Localization for Unitary Anderson Models*, arXiv : 0903.0028v1 (2009).
- [87] M. Abramowitz, and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, US Government printing office, 1964.
- [88] M. Griniasty and S. Fishman, *Localization by pseudorandom potentials in one dimension*, Phys. Rev. Lett. 60 (1988), pp. 1334–1337.
- [89] N. Brenner and S. Fishman, *Pseudo-randomness and localization*, Nonlinearity 5 (1992), pp. 211–235.

- [90] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.*, Math. Ann. 77 (1916), p. 313.
- [91] P. Lloyd, *Exactly solvable model of electronic states in a three-dimensional disordered Hamiltonian : non-existence of localized states*, J. Phys. C 2 (1969), pp. 1717–1725.
- [92] D.L. Shepelyansky, *Localization of quasienergy eigenfunctions in action space*, Phys. Rev. Lett. 56 (1986), pp. 677–680.
- [93] S. Fishman, R.E. Prange, and M. Griniasty, *Scaling theory for the localization length of the kicked rotor*, Phys. Rev. A 39 (1989), pp. 1628–1633.
- [94] G. Casati, I. Guarneri, F. Izrailev, and R. Scharf, *Scaling behavior of localization in quantum chaos*, Phys. Rev. Lett. 64 (1990), pp. 5–8.
- [95] T. Dittrich and U. Smilansky, *Spectral properties of systems with dynamical localization : I. The local spectrum*, Nonlinearity 4 (1991), pp. 59–84.
- [96] B.V. Chirikov, F. Izrailev, and D.L. Shepelyansky, *Dynamical Stochasticity in Classical and Quantum Mechanics*, Sov. Sci. Rev. C 2 (1981), p. 209.
- [97] S. Winberger, I. Guarneri, and S. Fishman, *Quantum resonances and decoherence for  $\delta$ -kicked atoms*, Nonlinearity 16 (2003), pp. 1381–1420.
- [98] K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.
- [99] J.L. Pichard, M. Sanquer, K. Slevin, and P. Debray, *Broken symmetries and localization lengths in Anderson insulators : Theory and experiment*, Phys. Rev. Lett. 65 (1990), pp. 1812–1815.
- [100] R. Scharf, *Kicked rotator for a spin-1/2 particle*, J. Phys. A 22 (1989), pp. 4223–4242.
- [101] R. Blümel and U. Smilansky, *Symmetry breaking and localization in quantum chaotic systems*, Phys. Rev. Lett. 69 (1992), pp. 217–220.
- [102] M. Thaha, R. Blümel, and U. Smilansky, *Symmetry breaking and localization in quantum chaotic systems*, Phys. Rev. E 48 (1993), pp. 1764–1781.
- [103] M.L. Mehta, *Random matrices*, Academic Press, New York, 1967.
- [104] C. Tian, A. Kamenev, and A. Larkin, *Ehrenfest time in the weak dynamical localization*, Phys. Rev. B 72 (2005), p. 045108.
- [105] H. Lignier, *Etude de la localisation dynamique avec des atomes refroidis par laser*, Thèse de doctorat de l'université de Lille I, Lille, France, 2005.
- [106] J. Chabé, *Chaos quantique et transition d'Anderson avec des atomes refroidis par laser*, Thèse de doctorat de l'université de Lille I, Lille, France, 2007.
- [107] W.D. Phillips, *Laser Cooling, Optical Traps and Optical Molasses*, in *Fundamental Systems in Quantum Optics, Les Houches 1990 Session LIII*, Dalibard, J. and Raimond, J.-M. and Zinn-Justin, J. ed., North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 165–210.
- [108] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am. B 6 (1989), pp. 2023–2045.
- [109] R. Blümel, S. Fishman, and U. Smilansky, *Excitation of molecular rotation by periodic microwave pulses. A testing ground for Anderson localization*, The Journal of Chemical Physics 84 (1986), pp. 2604–2614.

- [110] H. Lignier, J. Chabé, D. Delande, J.C. Garreau, and P. Szriftgiser, *Reversible Destruction of Dynamical Localization*, Phys. Rev. Lett. 95 (2005), p. 234101.
- [111] H. Lignier, J.C. Garreau, P. Szriftgiser, and D. Delande, *Quantum diffusion in the quasiperiodic kicked rotor*, Europhys. Lett. 69 (2005), pp. 327–333.
- [112] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon, *Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams*, Phys. Rev. A 55 (1997), pp. 2989–3001.
- [113] W.H. Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003), pp. 715–775.
- [114] E. Ott, T.M. Antonsen, and J.D. Hanson, *Effect of Noise on Time-Dependent Quantum Chaos*, Phys. Rev. Lett. 53 (1984), pp. 2187–2190.
- [115] D. Cohen, *Quantum chaos, dynamical correlations, and the effect of noise on localization*, Phys. Rev. A 44 (1991), pp. 2292–2313.
- [116] E. Doron and S. Fishman, *Anderson localization for a two-dimensional rotor*, Phys. Rev. Lett. 60 (1988), pp. 867–870.
- [117] J. Wang and A.M. García-García, *Anderson transition in a three-dimensional kicked rotor*, Phys. Rev. E 79 (2009), 036206, p. 036206.
- [118] D.L. Shepelyansky, *Some statistical properties of simple classically stochastic quantum systems*, Physica D 8 (1983), pp. 208–222.
- [119] F. Borgonovi and D.L. Shepelyansky, *Particle propagation in a random and quasiperiodic potential*, Physica D 109 (1997), pp. 24–31.
- [120] G. Lemarié, J. Chabé, P. Szriftgiser, J.C. Garreau, B. Grémaud, and D. Delande, *Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves : Theory and Experiment*, accepted to Phys. Rev. A, arXiv :0907.3411 (2009).
- [121] Q. Li, C.M. Soukoulis, E.N. Economou, and G.S. Grest, *Anisotropic tight-binding model for localization*, Phys. Rev. B 40 (1989), pp. 2825–2830.
- [122] N.A. Panagiotides, S.N. Evangelou, and G. Theodorou, *Localization-delocalization transition in anisotropic solids*, Phys. Rev. B 49 (1994), pp. 14122–14127.
- [123] I. Zambetaki, Q. Li, E.N. Economou, and C.M. Soukoulis, *Localization in Highly Anisotropic Systems*, Phys. Rev. Lett. 76 (1996), pp. 3614–3617.
- [124] F. Haake *Quantum Signatures of Chaos*, 2 Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2001.
- [125] H.J. Stöckmann *Quantum Chaos an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- [126] J. Ringot, P. Szriftgiser, J.C. Garreau, and D. Delande, *Experimental Evidence of Dynamical Localization and Delocalization in a Quasiperiodic Driven System*, Phys. Rev. Lett. 85 (2000), pp. 2741–2744.
- [127] P. Szriftgiser, J. Ringot, D. Delande, and J.C. Garreau, *Observation of Sub-Fourier Resonances in a Quantum-Chaotic System*, Phys. Rev. Lett. 89 (2002), p. 224101.
- [128] J. Chabé, H. Lignier, H. Cavalcante, D. Delande, P. Szriftgiser, and J.C. Garreau, *Quantum Scaling Laws in the Onset of Dynamical Delocalization*, Phys. Rev. Lett. 97 (2006), p. 264101.

- [129] B. Shapiro and E. Abrahams, *Scaling for the frequency-dependent conductivity in disordered electronic systems*, Phys. Rev. B 24 (1981), pp. 4889–4891.
- [130] B. Shapiro, *Self-consistent calculation of the frequency-dependent conductivity near the Anderson transition*, Phys. Rev. B 25 (1982), pp. 4266–4269.
- [131] A. Altland, *Diagrammatic approach to Anderson localization in the quantum kicked rotator*, Phys. Rev. Lett. 71 (1993), pp. 69–72.
- [132] C. Tian, A. Kamenev, and A. Larkin, *Weak Dynamical Localization in Periodically Kicked Cold Atomic Gases*, Phys. Rev. Lett. 93 (2004), p. 124101.
- [133] G. Lemarié, B. Grémaud, and D. Delande, *Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor*, EPL 87 (2009), p. 37007.
- [134] L. Onsager, *Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition*, Phys. Rev. 65 (1944), pp. 117–149.
- [135] A. Aharony and M.E. Fisher, *Universality in Analytic Corrections to Scaling for Planar Ising Models*, Phys. Rev. Lett. 45 (1980), pp. 679–682.
- [136] Z.Q. Zhang, A.A. Chabanov, S.K. Cheung, C.H. Wong, and A.Z. Genack, *Dynamics of localized waves : Pulsed microwave transmissions in quasi-one-dimensional media*, Phys. Rev. B 79 (2009), p. 144203.
- [137] O.I. Lobkis and R.L. Weaver, *Self-consistent transport dynamics for localized waves*, Phys. Rev. E 71 (2005), p. 011112.
- [138] S. Havlin and D. Ben-Avraham, *Diffusion in disordered media*, Advances In Physics 36 (1987), pp. 695–798.
- [139] D. Stauffer, and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis, 1994.
- [140] R. Ketzmerick, G. Petschel, and T. Geisel, *Slow decay of temporal correlations in quantum systems with Cantor spectra*, Phys. Rev. Lett. 69 (1992), pp. 695–698.
- [141] R. Artuso, G. Casati, and D. Shepelyansky, *Fractal spectrum and anomalous diffusion in the kicked Harper model*, Phys. Rev. Lett. 68 (1992), pp. 3826–3829.
- [142] R. Ketzmerick, K. Kruse, S. Kraut, and T. Geisel, *What determines the spreading of a wave packet ?*, Phys. Rev. Lett. 79 (1997), pp. 1959–1963.
- [143] H. Hentschel and I. Procaccia, *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*, Physica D 8 (1983), pp. 435–444.
- [144] T. Halsey, M. Jensen, L. Kadanoff, I. Procaccia, and B. Shraiman, *Fractal measures and their singularities : the characterization of strange sets*, Physical Review A 33 (1986), pp. 1141–1151.
- [145] I. Guarneri, *Spectral Properties of Quantum Diffusion on Discrete Lattices*, Europhys. Lett. 10 (1989), pp. 95–100.
- [146] A.M. García-García, *Semiclassical Theory of the Anderson Transition*, Phys. Rev. Lett. 100 (2008), 076404, p. 076404.
- [147] C. Castellani, C. Di Castro, and L. Peliti, *On the upper critical dimension in Anderson localisation*, J. Phys. A 19 (1986), pp. L1099–L1103.
- [148] V. Bretin, S. Stock, Y. Seurin, and J. Dalibard, *Fast Rotation of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. 92 (2004), p. 050403.

- [149] V. Schweikhard, I. Coddington, P. Engels, V.P. Mogendorff, and E.A. Cornell, *Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates in and near the Lowest Landau Level*, Phys. Rev. Lett. 92 (2004), p. 040404.
- [150] M.A. Baranov, K. Osterloh, and M. Lewenstein, *Fractional Quantum Hall States in Ultracold Rapidly Rotating Dipolar Fermi Gases*, Phys. Rev. Lett. 94 (2005), p. 070404.
- [151] G.J. Duffy, S. Parkins, T. Müller, M. Sadgrove, R. Leonhardt, and A.C. Wilson, *Experimental investigation of early-time diffusion in the quantum kicked rotor using a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. E 70 (2004), p. 056206.
- [152] J. Reslen, C.E. Creffield, and T.S. Monteiro, *Dynamical instability in kicked Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A 77 (2008), 043621, p. 043621.
- [153] I.L. Aleiner and A.I. Larkin, *Divergence of classical trajectories and weak localization*, Phys. Rev. B 54 (1996), pp. 14423–14444.
- [154] P.W. Brouwer and A. Altland, *Anderson localization from classical trajectories*, Phys. Rev. B 78 (2008), 075304, p. 075304.

## Résumé

En dimension trois, les états propres d'une particule quantique soumise à un potentiel désordonné présentent une transition, appelée transition d'Anderson, entre un régime délocalisé à faible désordre et un régime localisé à fort désordre. Cette localisation étant due aux interférences, elle est facilement perturbée par des effets de décohérence ou d'interaction entre particules, et est donc délicate à observer. Dans ce mémoire, nous rapportons nos travaux théoriques ayant permis la première observation expérimentale de la transition d'Anderson avec des ondes de matière atomiques.

Un nuage d'atomes froids soumis à une onde stationnaire pulsée de façon quasi-périodique réalise une variante du Kicked Rotor (paradigme du chaos quantique) analogue à un modèle d'Anderson 3D. Cependant, la limite thermodynamique n'est pas accessible expérimentalement. Interprétant ces contraintes comme similaires à des effets de taille finie, nous construisons une méthode de "finite-time scaling" permettant de caractériser la transition expérimentalement, de donner la première détermination expérimentale non-ambigüe de l'exposant critique  $\nu$  de la transition, et de confirmer que le Kicked Rotor quasi-périodique appartient à la même classe d'universalité que le modèle d'Anderson. À partir de la théorie auto-cohérente de la localisation, nous calculons l'état critique du système, prédiction trouvée en très bon accord avec les données expérimentales et numériques.

**Mots-clefs** : localisation, transition d'Anderson, ondes de matière atomiques, chaos quantique, désordre, transport quantique

## Abstract

In three dimensions, the eigenstates of a quantum particle subject to a disordered potential have a transition, called the Anderson transition, between a delocalized regime at low disorder and a localized regime at high disorder. This localization being due to interference, it is easily perturbed by decoherence or interaction between particles, and is therefore difficult to observe. In this paper, we report our theoretical work which has enabled the first experimental observation of the Anderson transition with atomic matter waves.

A cloud of cold atoms exposed to a quasi-periodically pulsed standing-wave realizes a variant of the Kicked Rotor (a paradigm of quantum chaos), analogous to a 3D Anderson model. However, the thermodynamic limit is not accessible experimentally. Interpreting these constraints as similar to finite size effects, we construct a finite-time scaling method to characterize the transition, giving the first unambiguous experimental determination of the critical exponent  $\nu$  of the transition, and to confirm that the quasiperiodic Kicked Rotor belongs to the same universality class as the Anderson model. From the self-consistent theory of localization, we calculate the critical state of the system, prediction found in very good agreement with experimental and numerical data.

**Keywords** : localization, Anderson transition, atomic matter waves, quantum chaos, disorder, quantum transport